

Tesis de Maestría

ENERGÍA DE MATRICES

Florencia Cubría

Orientadores:

Diego Bravo, Universidad de la República
Juan Rada, Universidad de Antioquia

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

Sea $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ el espacio de matrices $n \times n$ con entradas complejas. Motivados por distintos tipos de energía de grafos definimos la energía de una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como

$$E(A) = \sum_{k=1}^n \left| \lambda_k - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right|$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ y $\text{tr}(A)$ denotan el espectro y la traza de la matriz A respectivamente, y $|z|$ el módulo del complejo z . Esta definición generaliza la definición de energía de un grafo introducida por I. Gutman en 1978 [1] tomando A como la matriz de adyacencia del grafo, así como otros tipos de energía [2] [3] [4] [5]. En este trabajo se establecen cotas superiores e inferiores para la definición de energía introducida, además de condiciones necesarias y suficientes para que las mismas sean alcanzadas. A su vez, para los distintos tipos de energía, expresaremos las cotas en términos de elementos del (di)grafo, que en algunos casos extienden cotas ya conocidas y en otros nos permiten obtener nuevos resultados [6].

Abstract

Let $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ denote the space of $n \times n$ matrices with complex entries. Based on different kinds of graph energy we define the energy of a matrix A in $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ as

$$E(A) = \sum_{k=1}^n \left| \lambda_k - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right|$$

where $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ and $\text{tr}(A)$ denote the spectrum and the trace of the matrix A respectively, and $|z|$ the modulus of $z \in \mathbb{C}$. This definition not only generalizes the definition of graph energy introduced by I. Gutman in 1978 [1] considering A as the adjacency matrix of the graph, but also different kinds of graph energy [2] [3] [4] [5]. In this work we find upper and lower bounds of the energy introduced and establish necessary and sufficient conditions for matrices which reach the bounds. Besides, for the different kinds of energy we express these bounds in terms of the elements of the (di)graph, which in some cases extend well-known results whereas in others let us obtain new ones [6].

Palabras Clave: energía, matriz, grafos, digrafos, espectro.
Key Words: energy, matrix, graphs, digraphs, spectra.

Índice

1. Introducción	1
2. Conceptos preliminares	2
2.1. Grafos y digrafos	2
2.2. Teoría espectral de matrices	8
2.2.1. Aspectos generales	8
2.2.2. Teoría de Perron-Frobenius	18
2.3. Teoría espectral de digrafos	33
3. Energía	45
3.1. Energía de grafos y digrafos	45
3.2. Energía de matrices	50
3.3. Cotas para la Energía de matrices	52
3.4. Aplicación a Energía de grafos y digrafos	57
Referencias	62

1. Introducción

La Teoría Algebraica de Grafos [7] [8] es un área que combina resultados de dos ramas de la matemática sin relación aparente: el Álgebra y la Teoría de Grafos.

La asociación de una familia de matrices a un grafo dado, permite traducir un problema de grafos en uno algebraico y recíprocamente, un problema algebraico en uno de grafos. La Teoría Espectral de Grafos estudia propiedades de los grafos vinculadas a un invariante en particular de esta familia de matrices: su espectro [9].

Si bien la producción académica en el área de Teoría Espectral de Grafos es profusa, la Teoría Espectral de Digrafos no ha sido suficientemente desarrollada. La diferencia radica en que las familias de matrices asociadas a digrafos no poseen la propiedad de simetría.

Una matriz asociada de forma natural a un grafo $G = (V, E)$ es la matriz de adyacencia A , cuyas entradas a_{ij} se definen como

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E, \end{cases}$$

donde $V = \{x_1, \dots, x_n\}$.

En el año 1978 I. Gutman introduce el concepto de Energía de un grafo [1] que define como

$$E(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ denota el espectro de la matriz de adyacencia. Si bien existe una motivación química dada por grafos que representan una molécula, la definición de energía para grafos arbitrarios ha resultado de particular interés matemático y ha sido ampliamente estudiada [17] [18] [19].

A su vez, se han definido nuevos tipos de energía de un grafo considerando diferentes matrices asociadas al mismo [2] [3] [4] [5]. Intentando unificar y generalizar a digrafos estos conceptos, introduciremos la siguiente definición de energía de una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$E(A) = \sum_{k=1}^n \left| \lambda_k - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right|$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ y $\text{tr}(A)$ denotan el espectro y la traza de la matriz A respectivamente, y $|z|$ el módulo del complejo z . La misma tiene como antecedentes [20] y [21].

En este trabajo, que dio lugar al un artículo [6], se establecen cotas superiores e inferiores para la definición de energía introducida, además de condiciones necesarias y suficientes para que las mismas sean alcanzadas. A su vez, para los distintos tipos de energía, expresaremos las cotas en términos de elementos del (di)grafo, que en algunos casos extienden cotas ya conocidas y en otros nos permiten obtener nuevos resultados.

2. Conceptos preliminares

2.1. Grafos y digrafos

Cualquiera de los resultados a continuación pueden encontrarse en [7].

Definición 2.1.1. Un *grafo dirigido* (o *digrafo*) D es un par (V, E) donde V es un conjunto finito no vacío cualquiera y E es un subconjunto de $V \times V$. Los elementos de V se denominan *vértices* y los de E *arcos*; los arcos de la forma (x, x) se denominan *lazos*.

Decimos que un digrafo es un *grafo* si E es simétrico, es decir,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E,$$

en este caso, identificamos (x, y) con (y, x) y denotamos $\{x, y\}$ a los elementos del conjunto E que denominaremos *aristas*.

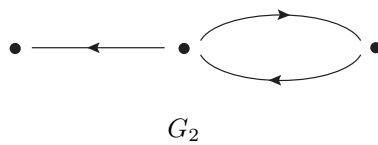
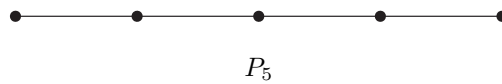
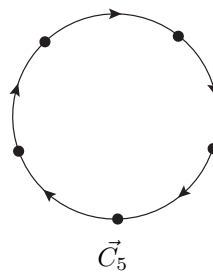
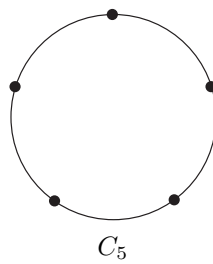
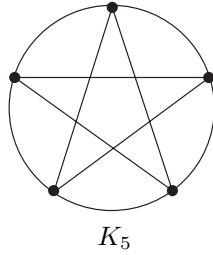
Decimos que un digrafo es un *grafo orientado* si E no posee lazos y es antisimétrico, es decir,

$$x \neq y, \quad (x, y) \in E \Rightarrow (y, x) \notin E.$$

A lo largo de este trabajo consideraremos digrafos sin lazos. Existe una representación gráfica natural de los digrafos en la cual los vértices se representan como puntos y los arcos de la forma (x, y) como segmentos dirigidos o flechas de x a y . En el caso de los grafos las aristas se representan como segmentos que unen los puntos que la componen en lugar de segmentos dirigidos.

Ejemplos 2.1.2.

1. Sea V un conjunto finito cualquiera, $G_1 = (V, \emptyset)$ se denomina *grafo vacío*.
2. Sean $V = \{1, \dots, n\}$ y $E = \{\{i, j\} : i, j \in V, i \neq j\}$, $K_n = (V, E)$ se denomina *grafo completo de n vértices*.
3. Sean $V = \{1, \dots, n\}$ y $E = \{\{i, i+1\} : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{\{n, 1\}\}$, $C_n = (V, E)$ se denomina *n -ciclo*.
4. Sean $V = \{1, \dots, n\}$ y $E = \{(i, i+1) : i = 1, \dots, n-1\} \cup \{(n, 1)\}$, $\vec{C}_n = (V, E)$ se denomina *n -ciclo dirigido*.
5. Sean $V = \{1, \dots, n\}$ y $E = \{\{i, i+1\} : i = 1, \dots, n-1\}$, $P_n = (V, E)$ se denomina *camino simple de n vértices*.
6. Sean $V = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{(2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$, $G_2 = (V, E)$ es un grafo dirigido que no es grafo orientado.



Definición 2.1.3. Sean $D_1 = (V_1, E_1)$ y $D_2 = (V_2, E_2)$ dos digrafos con conjuntos de vértices disjuntos. La *suma directa* de los digrafos D_1 y D_2 es el digrafo dado por el par

$$D_1 \oplus D_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2).$$

Inductivamente podemos definir la suma directa de un número finito l de digrafos $\bigoplus_{i=1}^l D_i$.

Definición 2.1.4. Sea $D = (V, E)$ un digrafo y x un vértice en V . El *grado de entrada* y el *grado de salida* de x se definen como

$$d^-(x) = \#\{y \in V : (y, x) \in E\}, \quad d^+(x) = \#\{y \in V : (x, y) \in E\}.$$

Decimos que un digrafo D es *k-salida (entrada) regular* si el grado de salida (entrada) de todos los vértices x en V es igual a k .

Sea $G = (V, E)$ un grafo, decimos que dos vértices x e y en V son *adyacentes* o *vecinos* y escribimos $x \sim y$, si $\{x, y\}$ es una arista. El *grado de un vértice* x , que denotaremos $d(x)$, es el grado de entrada del vértice (que coincide con el de salida). Decimos que un grafo G es *k-regular* si el grado de todos los vértices x en V es igual a k .

La definición a continuación nos permitirá enunciar una condición necesaria y suficiente para que la cota de Koolen y Moulton 3.1.4 sea alcanzada. Decimos que un grafo es *fuertemente regular* de parámetros (n, k, l, m) con $l, m \neq 0$ si tiene n vértices, es k -regular y dados dos vértices x e y se cumple que

$$\#\{z \in V : z \sim x, z \sim y\} = \begin{cases} l & \text{si } x \sim y, \\ m & \text{si } x \not\sim y. \end{cases}$$

Ejemplo 2.1.5.

K_4 es un grafo fuertemente regular de parámetros $(4, 3, 2, 2)$.

Observación 2.1.6. Sea $G = (V, E)$ un grafo y x un vértice, se tiene que

$$d(x) = \#\{y \in V : y \sim x\}.$$

Definición 2.1.7. Una *orientación en un grafo* $G = (V, E)$ es una función

$$\sigma : V \times V \rightarrow \{0, 1\},$$

que para todo $\{x, y\} \notin E$ cumple que $\sigma(x, y) = 0$, y para todo $\{x, y\} \in E$ cumple que $\sigma(x, y) = 1$ si, y sólo si, $\sigma(y, x) = 0$.

Observación 2.1.8. Una orientación σ en $G = (V, E)$ induce un grafo orientado $G^\sigma = (V, E^\sigma)$ donde $E^\sigma = \{(x, y) : \sigma(x, y) = 1\}$. Recíprocamente, para todo grafo orientado H existe un grafo G y una orientación σ en él tales que $H = G^\sigma$.

Observación 2.1.9. Sea $G = (V, E)$ un grafo, σ una orientación en él y G^σ el grafo orientado inducido, se cumple que

$$d(x) = d_\sigma^+(x) + d_\sigma^-(x),$$

donde $d(x)$ denota el grado del vértice x en el grafo G y $d_\sigma^-(x)$ y $d_\sigma^+(x)$ los grados de entrada y salida en el grafo G^σ respectivamente.

Proposición 2.1.10. Sea $D = (V, E)$ un digrafo con a arcos, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} d^+(x) = \sum_{x \in V} d^-(x) = a.$$

Demostración. Cada arco aporta 1 unidad a las sumatorias consideradas. \square

Corolario 2.1.11. Sea $G = (V, E)$ un grafo con e aristas, entonces se cumple que

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2e.$$

Definición 2.1.12. Sea D un digrafo y x e y vértices del digrafo. Denominamos *camino de largo* $r \geq 1$ de x a y a una sucesión de vértices (x_0, x_1, \dots, x_r) donde $x_0 = x$, $x_r = y$ y se cumple que $(x_i, x_{i+1}) \in E$ para todo $i = 0, \dots, r - 1$. Si $x = y$ decimos que el camino es *cerrado*. Decimos que dos vértices x e y están *fuertemente conectados* si son el mismo vértice o existen caminos de x a y y de y a x .

Observación 2.1.13. La relación “estar fuertemente conectado con” sobre los vértices de un digrafo es una relación de equivalencia.

Definición 2.1.14. Sea D un digrafo. Las clases de equivalencia de la relación anterior se denominan *componentes fuertemente conexas* del digrafo y decimos que el digrafo es *fuertemente conexo* si existe una única clase de equivalencia.

Si G es un grafo llamamos *componentes conexas* a las componentes fuertemente conexas y grafo *conexo* si posee una única componente conexa.

Definición 2.1.15. Sea D un digrafo fuertemente conexo. La “distancia” de un vértice x a un vértice y es una función $\tilde{d} : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$ definida como

$$\tilde{d}(x, y) = \begin{cases} \text{mín}\{r : \text{existe un camino de largo } r \text{ de } x \text{ a } y\} & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Debemos observar que en general, la función “distancia” no es simétrica por lo cual no define una métrica en V .

Definición 2.1.16. Sea D un digrafo. Decimos que el digrafo $D' = (V', E')$ es *subdigrafo* de D si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. El *subdigrafo generado* por un subconjunto de vértices V' es el digrafo $\langle V' \rangle = (V', E')$ donde $E' = \{(x, y) \in E : x, y \in V'\} = E \cap (V' \times V')$. Un subdigrafo D' de un digrafo D se dice *inducido* si existe $V' \subset V$ tal que $\langle V' \rangle = D'$.

El ejemplo a continuación muestra que no todo subdigrafo es un subdigrafo inducido.

Ejemplo 2.1.17.

Sean $V = V' = \{1, 2, 3\}$, $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1)\}$ y $E' = \{(1, 3)\}$. El digrafo $D' = (V', E')$ es un subdigrafo de $D = (V, E)$ no inducido.

Definición 2.1.18. Sean $D_1 = (V_1, E_1)$ y $D_2 = (V_2, E_2)$ dos digrafos.

Decimos que D_1 y D_2 son *isomorfos* y escribimos $D_1 \cong D_2$, si existe una función biyectiva $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ que cumple que

$$(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (\phi(x), \phi(y)) \in E_2.$$

Definición 2.1.19. Decimos que un digrafo D posee un n -ciclo o un ciclo de longitud n si existe un subdigrafo isomorfo a un ciclo dirigido \vec{C}_n .

Decimos que un digrafo D es *lineal* si es isomorfo a la suma directa de un número finito de ciclos dirigidos $\oplus_{i=1}^l \vec{C}_{n_i}$.

Definición 2.1.20. Decimos que un digrafo $D = (V, E)$ es *bipartito* si existen V_1 y V_2 subconjuntos de V tales que

$$V_1 \cap V_2 = \emptyset, \quad V_1 \cup V_2 = V,$$

$$E \subset (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1).$$

En otras palabras, un digrafo es bipartito si cumple que podemos particionar el conjunto de vértices V en conjuntos V_1 y V_2 de modo tal que los arcos en el digrafo van de un vértice en V_1 a un vértice en V_2 o viceversa.

Ejemplo 2.1.21.

\vec{C}_n es bipartito si, y sólo si, n es par.

Observación 2.1.22. Sean D y D' digrafos, D' subdigrafo de D .

1. Si D es bipartito entonces D' también lo es.
2. Si D' no es bipartito entonces D tampoco lo es.

Proposición 2.1.23. Sea D un digrafo fuertemente conexo. D es bipartito si, y sólo si, no posee ciclos de longitud impar.

Demostración. (\Rightarrow) Si existiera un ciclo dirigido de longitud impar en D entonces D no sería bipartito por la parte 2. de la observación 2.1.22, lo cual es absurdo.

(\Leftarrow) Sea y un vértice fijo, y consideremos la siguiente partición en V :

$$V_1 = \{x \in V : d(x, y) = \dot{2}\} \quad V_2 = \{x \in V : d(x, y) \neq \dot{2}\}.$$

Tenemos que $V_1 \cup V_2 = V$ por ser D fuertemente conexo, también es claro que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Veamos ahora que $E \subset (V_1 \times V_2) \cup (V_2 \times V_1)$. Comencemos por observar que

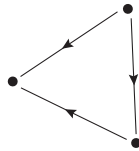
$$d(x, y) = \dot{2} \Rightarrow d(y, x) = \dot{2},$$

$$d(x, y) \neq \dot{2} \Rightarrow d(y, x) \neq \dot{2}$$

pues de lo contrario podríamos construir un ciclo dirigido de longitud impar. Luego, si existiera un arco en $V_1 \times V_1$ (o en $V_2 \times V_2$) también podríamos construir un ciclo dirigido de longitud impar, lo que termina la prueba. \square

Ejemplo 2.1.24.

Sean $V = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$, $D = (V, E)$ no es bipartito a pesar de no contener ciclos dirigidos de longitud impar, lo que muestra que la hipótesis de conexión fuerte es necesaria.



2.2. Teoría espectral de matrices

Comencemos introduciendo algo de notación:

Notación	Descripción
\mathbb{K}	\mathbb{R} ó \mathbb{C}
$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$	matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en \mathbb{K}
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	matrices de tamaño $n \times n$ con entradas en \mathbb{K}
$\mathbf{0}$	matriz nula de tamaño $m \times n$
I_n ó I	matriz identidad de tamaño $n \times n$
J_n ó J	matriz de tamaño $n \times n$ cuyas entradas son todas iguales a 1
a_{ij} ó $(A)_{ij}$	entrada (i, j) de la matriz A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$
$a_{ij}^{(k)}$ ó $(A^k)_{ij}$	entrada (i, j) de la matriz A^k en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
$C_i(A)$	i -ésima columna de la matriz A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$
$F_j(A)$	j -ésima fila de la matriz A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$
\mathbf{o}	vector nulo en \mathbb{K}^n
e_i	i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{K}^n
$\mathbb{1}$	vector de \mathbb{K}^n cuyas entradas son todas iguales a 1
$diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matriz diagonal de tamaño $n \times n$ cuya entrada (i, i) es igual a λ_i
$A \leq B$	A, B en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} \leq b_{ij}$ para todo (i, j)
$A < B$	A, B en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} < b_{ij}$ para todo (i, j)
$ A $	A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con $(A)_{ij} = (A)_{ij} $ para todo (i, j)

2.2.1. Aspectos generales

Cualquiera de los resultados a continuación pueden encontrarse en [11].

Definición 2.2.1. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, decimos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es *valor propio* de A , si existe un vector $v \in \mathbb{C}^n$ no nulo que verifica $Av = \lambda v$, v se denomina *vector propio* asociado a λ . El conjunto

$$S_\lambda(A) = \{v \in \mathbb{C}^n : Av = \lambda v\} = Ker(\lambda I - A)$$

se denomina *subespacio propio* asociado al valor propio λ .

Observación 2.2.2. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y λ valor propio de A , se cumple que $S_\lambda(A)$ es un subespacio no trivial de \mathbb{C}^n A -invariante.

Proposición 2.2.3. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se cumple que λ es valor propio de A si y sólo si $\det(\lambda I - A) = 0$.

Demostración. Tenemos que λ es valor propio de A si y sólo si $Ker(\lambda I - A) \neq \{\mathbf{o}\}$ lo cual ocurre si y sólo si $\lambda I - A$ es no invertible, esto es, si $\det(\lambda I - A) = 0$. \square

Observación 2.2.4. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(xI - A)$ es un polinomio de grado n de variable x .

Definición 2.2.5. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $p_A(x) = \det(xI - A)$ se denomina *polinomio característico* de A . El (multi)conjunto

$$Sp_A = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$$

compuesto por las raíces de p_A se denomina *espectro* de la matriz.

Observación 2.2.6. Los valores propios de la matriz A coinciden con las raíces del polinomio característico p_A por la proposición 2.2.3.

Definición 2.2.7. Dos matrices A y B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dicen *coespectrales* si $Sp_A = Sp_B$.

Proposición 2.2.8. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, A y A^t son coespectrales.

Demostración. Veamos que $p_A = p_{A^t}$, en efecto,

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det(xI - A)^t = \det(xI - A^t) = p_{A^t}(x).$$

□

Definición 2.2.9. Decimos que las matrices A y B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ son *semejantes* si existe P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertible tal que $A = PBP^{-1}$.

Proposición 2.2.10. Matrices semejantes poseen el mismo polinomio característico, en particular, son coespectrales.

Demostración. Sean A y B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matrices semejantes, tenemos que existe una matriz P invertible tal que $A = PBP^{-1}$. Luego,

$$p_A(x) = \det(xI - A) = \det(P(xI - B)P^{-1}) = \det(xI - B) = p_B(x).$$

□

Definición 2.2.11. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y λ un valor propio. Se denomina *multiplicidad algebraica* de λ , denotada $ma(\lambda)$, a la multiplicidad de λ como raíz del polinomio p_A . La *multiplicidad geométrica* de λ , denotada $mg(\lambda)$, es la dimensión del subespacio propio $S_\lambda(A)$. Decimos que un valor propio es *simple* si su multiplicidad algebraica es 1.

Observación 2.2.12. Sean $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ el conjunto de valores propios de A y $m_i = ma(\lambda_i)$ con $i = 1, \dots, r$, entonces se cumple que

$$Sp_A = [\lambda_1^{(m_1)}, \dots, \lambda_r^{(m_r)}].$$

Proposición 2.2.13. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y λ un valor propio, se cumple que

$$1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda) \leq n.$$

Demostración. Es claro que $1 \leq mg(\lambda)$ y $ma(\lambda) \leq n$. Probemos que $mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$. Sea $m = mg(\lambda)$, consideremos $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base de S_λ que completaremos a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ de \mathbb{C}^n . Sea $T_A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es la transformación lineal dada por $T_A(v) = Av$ y consideremos la matriz

$$B = {}_{\mathcal{B}}(T_A)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda I_m & X \\ \mathbf{0} & Y \end{pmatrix},$$

con X en $\mathcal{M}_{m \times (n-m)}(\mathbb{C})$ e Y en $\mathcal{M}_{n-m}(\mathbb{C})$. Por otro lado, sabemos que si \mathcal{C} es la base canónica de \mathbb{C}^n se tiene que $A = {}_{\mathcal{C}}(T_A)_{\mathcal{C}}$, luego, las matrices A y B resultan semejantes y $p_A(x) = p_B(x) = (x - \lambda)^m p_Y(x)$ de donde se deduce que $ma(\lambda) \geq m = mg(\lambda)$ lo que termina la prueba. \square

Corolario 2.2.14. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ entonces posee al menos un vector propio.*

Definición 2.2.15. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Decimos que una matriz A es *diagonalizable* si existe una base de \mathbb{C}^n compuesta por vectores propios de A .

A continuación demostraremos condiciones equivalentes a la definición de matriz diagonalizable, para lo cual será necesaria la siguiente proposición.

Proposición 2.2.16. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ valores propios distintos de A . Entonces se cumple*

$$S_{\lambda_1} + \dots + S_{\lambda_r} = S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r},$$

donde $S_{\lambda_i} = S_{\lambda_i}(A)$.

Demostración. Basta probar que el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ conformado por vectores propios asociados a diferentes valores propios es L.I.

Realizaremos la prueba por inducción en r . Si $r = 1$ por ser v_1 vector propio tenemos que es no nulo y en consecuencia $\{v_1\}$ resulta L.I.

Supongamos que vale para r y probemos que vale para $r + 1$. Consideremos $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$ en \mathbb{C} tales que

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} v_{r+1} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

multiplicando por A obtenemos

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_r \lambda_r v_r + \alpha_{r+1} \lambda_{r+1} v_{r+1} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

Si multiplicamos (1) por λ_{r+1} y lo restamos a (2) obtenemos

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{r+1}) v_1 + \dots + \alpha_r (\lambda_r - \lambda_{r+1}) v_r = \mathbf{0}.$$

Por ser $\{v_1, \dots, v_r\}$ un conjunto L.I. y $\lambda_{r+1} \neq \lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, r$, obtenemos que $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. Luego, la ecuación (1) resulta $\alpha_{r+1} v_{r+1} = 0$, de donde se deduce que $\alpha_{r+1} = 0$ y así que $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}\}$ es un conjunto L.I. \square

Proposición 2.2.17. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Equivalen:*

1. A es diagonalizable.
2. A es semejante a una matriz diagonal.
3. $\mathbb{C}^n = S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r}$ donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ es el conjunto de valores propios de A y $S_{\lambda_i} = S_{\lambda_i}(A)$ los subespacios propios correspondientes.

Demostración. (1. \Rightarrow 2.) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de vectores propios tales que $Av_i = \lambda_i v_i$ y \mathcal{C} la base canónica de \mathbb{C}^n . Consideremos P la matriz de cambio de base ${}_c(Id)_{\mathcal{B}}$ que resulta invertible y $P^{-1} = {}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{C}}$. Considerando

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

obtenemos que $A = PDP^{-1}$ lo que prueba que A es semejante a una matriz diagonal. (2. \Rightarrow 1.) Tenemos que existe P invertible en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A = PDP^{-1}$, sea \mathcal{B} el subconjunto de \mathbb{C}^n formado por las columnas de la matriz P que resulta una base de \mathbb{C}^n por ser P invertible. La igualdad $AP = PD$ prueba que la base \mathcal{B} está compuesta por vectores propios lo que termina la prueba.

(1. \Rightarrow 3.) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de vectores propios de A , consideremos el subespacio generado por aquellos vectores propios de \mathcal{B} correspondientes al mismo valor propio λ , que podemos suponer que son $v_1, \dots, v_{m_\lambda}$. Tenemos que $m_\lambda \leq mg(\lambda)$ por lo cual

$$n = \sum_{i=1}^r m_{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^r mg(\lambda_i) = \dim(S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r}) \leq n,$$

de donde se deduce que $\dim(S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r}) = n$ por lo cual $\mathbb{C}^n = S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r}$. (3. \Rightarrow 1.) Sea \mathcal{B}_i una base del subespacio propio S_{λ_i} con $i = 1, \dots, n$. Luego, $\cup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$ es una base de \mathbb{C}^n de vectores propios lo que termina la prueba.

□

Definición 2.2.18. Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, la *matriz adjunta de A* es una matriz $A^* \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ de entradas $(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$, es decir, $A^* = \overline{A}^t = \overline{A}^t$. Decimos que una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es *hermitiana* si $A = A^*$, *unitaria* si es invertible y $A^{-1} = A^*$, y *normal* si $AA^* = A^*A$. Decimos que una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si es invertible y $A^{-1} = A^t$.

Observación 2.2.19. Tanto las matrices hermitianas como las unitarias son matrices normales.

Observación 2.2.20. Una matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria si y sólo si sus filas (o columnas) componen una base ortonormal del espacio vectorial \mathbb{C}^n , una matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonal si y sólo si sus filas (o columnas) componen una base ortonormal del espacio vectorial \mathbb{R}^n .

Observación 2.2.21. Consideramos \mathbb{C}^k con el producto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, entonces para u y v vectores cualesquiera de \mathbb{C}^n y \mathbb{C}^m respectivamente se cumple que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle.$$

Proposición 2.2.22. Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, se cumple que $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(A^*A)$.

Demostración. Es claro que $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}(A^*A)$. Probemos la otra inclusión, sea v en $\text{Ker}(A^*A)$, luego

$$0 = \langle v, A^*Av \rangle = \langle Av, Av \rangle = \|Av\|^2,$$

por lo cual, $Av = \mathbf{0}$ lo que prueba que $v \in \text{Ker}(A)$. □

Proposición 2.2.23. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, λ es valor propio de A si y sólo si $\bar{\lambda}$ es valor propio de A^* .

Demostración. Sea λ valor propio de A , es decir, $\det(\lambda I - A) = 0$, luego

$$\det(\bar{\lambda}I - A^*) = \det((\overline{\lambda I - A})^t) = \overline{\det(\lambda I - A)} = 0,$$

lo que prueba que $\bar{\lambda}$ es valor propio de A^* . El recíproco se desprende de la siguiente igualdad

$$(A^*)^* = A.$$

□

Teorema 2.2.24. (*Teorema Espectral*)

Toda matriz hermitiana posee espectro real y es diagonalizable en una base ortonormal, es decir, existe una base ortonormal de vectores propios.

Demostración. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comenzaremos por probar que todos los valores propios son reales. Sea λ un valor propio y v un vector propio asociado, tenemos que

$$\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Av, v \rangle = \langle v, Av \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \langle v, v \rangle,$$

además, $\langle v, v \rangle = \|v\|^2 > 0$ por lo cual $\lambda = \bar{\lambda}$, esto es, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora que $S_\lambda \perp S_\mu$ para todo $\lambda \neq \mu$. Consideremos $v \in S_\lambda$ y $w \in S_\mu$, tenemos que

$$\lambda \langle v, w \rangle = \langle \lambda v, w \rangle = \langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle = \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle = 0,$$

luego $\langle v, w \rangle = 0$.

Falta ver que A es diagonalizable. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ los valores propios distintos de A . Supongamos que $U = S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r} \neq \mathbb{C}^n$ y consideremos $W = (S_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus S_{\lambda_r})^\perp$ subespacio A -invariante por ser A autoadjunta, además de ser no trivial.

Afirmación. Si W es un subespacio de \mathbb{C}^n A -invariante no trivial entonces existe $w \in W$ vector propio de A .

Sea $m = \dim(W)$ y R en $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{C})$ una matriz cuyas columnas conforman una base ortonormal de W , en particular se cumple que $R^*R = I$. Por ser W

un subespacio A -invariante, se tiene que $AR = RB$ con B en $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, luego, $B = R^*AR \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Sea u un vector propio de B que existe por el corolario 2.2.14, se tiene que

$$ARu = RBu = R\lambda u = \lambda Ru.$$

Como además $Ru \neq \mathbf{0}$ obtenemos que Ru es un vector propio de A , además de estar en W , como queríamos probar.

Por la afirmación obtenemos que existe en W un vector propio de A lo que contradice que U sea la suma directa de todos los subespacios propios y termina la prueba. □

Corolario 2.2.25. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A es una matriz autoadjunta entonces es unitariamente diagonalizable, es decir, existe una matriz unitaria P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^*$.*

Corolario 2.2.26. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A es una matriz simétrica entonces es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existe una matriz ortogonal P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^t$.*

Veamos un ejemplo de una matriz no diagonalizable.

Ejemplo 2.2.27.

Sea A en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que $mg(1) = 1 < 2 = ma(1)$ por lo cual la matriz A resulta no diagonalizable.

Si bien una matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puede no ser diagonalizable, siempre es posible hallar su *forma de Jordan*.

Definición 2.2.28. Se denomina *sub-bloque de Jordan* de valor propio λ y tamaño k a una matriz $sJ_k(\lambda)$ en $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ de la forma

$$sJ_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se denomina *bloque de Jordan* de valor propio λ a una matriz cuadrada $J(\lambda)$ de la forma

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} sJ_{k_1}(\lambda) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & sJ_{k_2}(\lambda) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & sJ_{k_l}(\lambda) \end{pmatrix},$$

con $k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_i$.

Se denomina *matriz de Jordan* a una matriz cuadrada J de la forma

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J(\lambda_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & J(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Observación 2.2.29. Una matriz diagonal es una matriz de Jordan cuyos bloques de Jordan están compuestos por sub-bloques de Jordan de tamaño 1.

A continuación presentaremos sin demostración el Teorema de Jordan que prueba que toda matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz de Jordan además de describir algunos aspectos de la matriz J en función de los valores propios de la matriz, sus multiplicidades algebraicas y geométricas. Para una demostración ver [11].

Teorema 2.2.30. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $Sp_A = [\lambda_1^{(m_1)}, \dots, \lambda_r^{(m_r)}]$, entonces existe P matriz invertible tal que $A = PJP^{-1}$ donde J es una matriz de Jordan compuesta por r bloques de Jordan $J(\lambda_i)$ de tamaño $m_i = ma(\lambda_i)$ que a su vez se encuentran compuestos por $mg(\lambda_i)$ sub-bloques. Además, la matriz J es única a menos del orden de los bloques $J(\lambda_i)$, por lo cual nos referimos a ella como la forma de Jordan de la matriz A .

Proposición 2.2.31. Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$. La matriz A^*A tiene todos sus valores propios no negativos.

Demostración. Observemos que A^*A es diagonalizable en una base ortonormal por ser hermitiana. Sea λ un valor propio de A^*A y v un vector propio asociado a λ . Tenemos que

$$\lambda \|v\|^2 = \lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle (A^*A)v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = \|Av\|^2,$$

luego $\lambda \geq 0$. □

Definición 2.2.32. Le llamamos *valores singulares* de una matriz A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ al (multi)conjunto

$$[\sqrt{\lambda} : \lambda \text{ es valor propio de } A^*A].$$

Observación 2.2.33. Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ de rango r . Si $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ son los valores propios de la matriz A^*A entonces $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$ y $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Teorema 2.2.34. (*Descomposición en valores singulares*)

Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ con $m \geq n$, entonces existen matrices unitarias V en $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, W en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y una matriz diagonal Σ en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ cuya diagonal está compuesta por los valores singulares de A , y verifican la siguiente igualdad

$$A = V\Sigma W^*.$$

Demostración. Sea $B = A^*A$ la cual resulta diagonalizable en una base ortonormal por ser autoadjunta. Sea $\mathcal{A} = \{w_1, \dots, w_n\}$ base ortonormal de vectores propios de B , tales que $Aw_i = \lambda_i w_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Para $i = 1, \dots, r$ consideremos $v_i = \frac{1}{\sigma_i} Aw_i$ con $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, probemos que el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ es ortonormal. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \left\langle \frac{1}{\sigma_i} Aw_i, \frac{1}{\sigma_j} Aw_j \right\rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle Aw_i, Aw_j \rangle = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle w_i, A^* Aw_j \rangle = \\ &= \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i \sigma_j} \langle w_i, w_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \end{aligned}$$

Completemos el conjunto $\{v_1, \dots, v_r\}$ a una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ de \mathbb{C}^m , sean W y V las matrices que tienen por columnas los vectores de \mathcal{A} y \mathcal{B} respectivamente, que resultan unitarias.

Observemos que para $i > r$ se tiene que $A^*Aw_i = \mathbf{0}$, es decir, $w_i \in \text{Ker}(A^*A) = \text{Ker}(A)$ por la proposición 2.2.22, por lo cual $Aw_i = \mathbf{0}$ y en consecuencia

$$C_i(AW) = Aw_i = \begin{cases} \sigma_i v_i & \text{si } i \leq r, \\ \mathbf{0} & \text{si } i > r. \end{cases}$$

Por otra parte

$$C_i(V\Sigma) = \begin{cases} \sigma_i v_i & \text{si } i \leq r, \\ \mathbf{0} & \text{si } i > r, \end{cases}$$

lo que prueba la igualdad entre las matrices AW y $V\Sigma$, o de forma equivalente,

$$A = V\Sigma W^*.$$

□

Proposición 2.2.35. *Sea A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$. Se cumple que los valores propios no nulos de la matriz A^*A son iguales a los de la matriz AA^* .*

Demostración. Se tiene que $A = V\Sigma W^*$, luego,

$$AA^* = V\Sigma\Sigma^*V^* \quad \text{y} \quad A^*A = W\Sigma^*\Sigma W^*,$$

por lo cual AA^* es semejante a $\Sigma\Sigma^*$ y A^*A semejante a $\Sigma^*\Sigma$. A su vez, se tiene que los valores propios no nulos de $\Sigma\Sigma^*$ y $\Sigma^*\Sigma$ coinciden, por lo cual los valores propios no nulos de AA^* y A^*A también coinciden. □

Corolario 2.2.36. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $AA^* = \alpha I_n$ entonces A es normal.*

Demostración. Tenemos que $Sp(AA^*) = [\alpha^{(n)}]$, luego, $Sp(A^*A) = [\alpha^{(n)}]$ de donde se deduce que $A^*A = \alpha I_n = AA^*$ lo que prueba que A es normal. □

Corolario 2.2.37. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A es la matriz nula si, y sólo si, $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0$*

Proposición 2.2.38. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A es normal entonces $S_\lambda(A) = S_{\bar{\lambda}}(A^*)$.

Demostración. Veamos en primer lugar que si M es una matriz normal se cumple que $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^*)$, efectivamente,

$$\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^*M) = \text{Ker}(MM^*) = \text{Ker}(M^*).$$

Consideremos $M = A - \lambda I$ que resulta normal por serlo A , luego,

$$S_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I) = \text{Ker}(A - \lambda I)^* = \text{Ker}(A^* - \bar{\lambda}I) = S_{\bar{\lambda}}(A^*).$$

□

Proposición 2.2.39. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A es normal entonces el (multi)conjunto de valores singulares de A es el siguiente

$$[|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } A].$$

Demostración. Por ser A normal tenemos que $S_\lambda(A) = S_{\bar{\lambda}}(A^*)$, esto es, todo vector propio v de A^* asociado al valor propio $\bar{\lambda}$ es a su vez un vector propio de A asociado al valor propio λ . Luego, tenemos que v es un vector propio de AA^* asociado al valor propio $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2$ lo que termina la prueba. □

Corolario 2.2.40. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A es normal y $|\lambda|^2 = \alpha$ para todo λ valor propio de A , entonces se cumple que

$$AA^* = A^*A = \alpha I_n$$

Observación 2.2.41. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A es normal y $|\lambda|^2 = \alpha$ para todo λ valor propio de A si y sólo si las filas (o columnas) de A forman un conjunto ortogonal de norma constante igual a $\sqrt{\alpha}$.

Ya observamos que no toda matriz es diagonalizable, menos aún, unitariamente diagonalizable. Sin embargo, el siguiente Teorema establece que toda matriz es *unitariamente semejante* a una matriz triangular superior.

Teorema 2.2.42. (Factorización de Schur) Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Existen matrices U unitaria y T triangular superior tales que $A = UTU^*$.

Demostración. Equivalentemente probaremos que existen matrices U unitaria y T triangular superior tales que $U^*AU = T$.

Aplicaremos inducción completa en n . Si $n = 1$ la matriz A es triangular superior y queda probado el caso base. Supongamos que vale el teorema para una matriz de tamaño n y consideremos una matriz A de tamaño $n + 1$. Sea λ un valor propio de A y v un vector propio asociado que podemos suponer de norma 1. Completamos $\{v\}$ a una base ortonormal de \mathbb{C}^{n+1} y definamos V como la matriz que tiene por columnas los vectores de la base, que resulta unitaria. Se cumple que

$$V^*AV = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

donde B es una matriz $n \times n$. Por hipótesis inductiva tenemos que existe una matriz unitaria W' y T' triangular superior tales que $W'^*BW' = T'$. Consideremos W definida como

$$W = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & W' \end{pmatrix}$$

matriz de tamaño $n + 1$ que resulta unitaria, además,

$$W^*(V^*AV)W = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & W'^*BW' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & T' \end{pmatrix}.$$

Si definimos $U = VW$ que resulta unitaria por ser producto de matrices unitarias, obtenemos que U^*AU es triangular superior y queda probado el paso inductivo. \square

Observación 2.2.43. Los espectros de las matrices A y T son iguales por ser semejantes, luego, la diagonal de la matriz T está compuesta por los valores propios de la matriz A .

Proposición 2.2.44. Sean A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y q en $\mathbb{C}[x]$. Si $Sp_A = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ entonces $Sp_{q(A)} = [q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)]$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.42 sabemos que existen U unitaria y T triangular superior tales que $A = UTU^*$. Es fácil ver que $q(A) = Uq(T)U^*$ con $q(T)$ triangular superior, más aún, si

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

entonces

$$q(T) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & q(\lambda_2) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Por ser $q(A)$ y $q(T)$ semejantes se tiene que $Sp_{q(A)} = Sp_{q(T)} = [q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)]$. \square

Definición 2.2.45. Decimos que una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es nilpotente si existe un entero $k \geq 1$ tal que $A^k = \mathbf{0}$.

Corolario 2.2.46. A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es nilpotente si y sólo si $Sp_A = [0^{(n)}]$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea $Sp_A = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$. Por la proposición 2.2.44 sabemos que $Sp_{A^k} = [\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k] = [0^{(n)}]$ por definición de matriz nilpotente, luego, tenemos que $Sp_A = [0^{(n)}]$ como queríamos probar.

(\Leftarrow) Consideremos la factorización de Schur de la matriz $A = UTU^*$, con U unitaria y T triangular superior. Por hipótesis sabemos que la diagonal de T es nula, luego, $T^{n-1} = \mathbf{0}$ y en consecuencia $A^{n-1} = UT^{n-1}U^* = \mathbf{0}$ lo que termina la prueba. \square

2.2.2. Teoría de Perron-Frobenius

Como el nombre de la sección lo indica, nos dirigimos a probar el teorema de Perron-Frobenius, el cual, además de constituir un pilar fundamental en la Teoría Espectral de Digrafos, es reconocido por sus múltiples aplicaciones entre las cuales se destaca el pagerank de google [10]. Dicho teorema fue probado por Perron para matrices positivas en [25] y generalizado a matrices no negativas por Frobenius en [26] [27] [28].

Cualquiera de los resultados a continuación pueden encontrarse en [29] [11].

Definición 2.2.47. El *radio espectral* de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que denotaremos $\rho(A)$ se define como

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in Sp_A\}.$$

Observación 2.2.48. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y α en \mathbb{C} , se tiene que $Sp_A = Sp_{A^t}$ y $Sp_{\alpha A} = \alpha Sp_A$ por las proposiciones 2.2.8 y 2.2.44, luego, $\rho(A^t) = \rho(A)$ y $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$.

Definición 2.2.49. Sea V un \mathbb{C} -espacio vectorial. Una *norma vectorial* es una función $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, +\infty)$ que verifica las siguientes propiedades para todo vector v y w en V , para todo escalar α en \mathbb{C} ,

1. $\|v\| = 0$ si y sólo si $v = \mathbf{0}$,
2. $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$,
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Ejemplo 2.2.50.

En \mathbb{C}^n cualquiera de las siguientes son normas vectoriales:

1. *Norma 1* $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$,
2. *Norma 2* $\|x\|_2 = (|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2)^{1/2}$,
3. *Norma infinito* $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$.

Observación 2.2.51. Para todo x en \mathbb{C}^n , se cumple que $\|x\|_2 = (x^*x)^{1/2}$, luego, si U en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria se cumple que

$$\|Ux\|_2 = \|x\|_2,$$

en efecto, $\|Ux\|_2^2 = (Ux)^*Ux = x^*U^*Ux = x^*x = \|x\|_2^2$.

Definición 2.2.52. Una *norma matricial* es una función $\|\cdot\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow [0, +\infty)$ que además de ser norma vectorial sobre el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifica que

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \tag{3}$$

para toda matriz A y B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Ejemplo 2.2.53.

La *norma 2* en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, es decir,

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

que también se denomina *norma de Frobenius*, es una norma matricial. En efecto, sabemos que $\|\cdot\|_2$ es una norma vectorial, veamos que además verifica que $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$, o de forma equivalente que $\|AB\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2$. Denotemos a_{ij} , b_{ij} y c_{ij} a las entradas de A , B y AB respectivamente. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$c_{ij}^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right).$$

Luego,

$$\sum_{i,j} c_{ij}^2 \leq \sum_{i,j} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_{kj}^2 \right) = \left(\sum_{i,k} a_{ik}^2 \right) \left(\sum_{k,j} b_{kj}^2 \right),$$

es decir,

$$\|AB\|_2^2 \leq \|A\|_2^2 \cdot \|B\|_2^2,$$

lo que finaliza la prueba.

No toda norma vectorial en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es una norma matricial como veremos a continuación.

Observación 2.2.54. Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertible, entonces la función definida como

$$\|M\| = \|PMP^{-1}\|,$$

es una norma matricial.

Ejemplo 2.2.55.

Consideremos la norma infinito en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con $n \geq 2$, es decir,

$$\|A\|_\infty = \max\{|a_{ij}| : i, j = 1, \dots, n\}.$$

Se tiene que $\|J^2\|_\infty = \|nJ\|_\infty = n$ mientras que $\|J\|_\infty \cdot \|J\|_\infty = 1^2 = 1$, luego, $\|J^2\|_\infty > \|J\|_\infty \cdot \|J\|_\infty$ por lo cual no es una norma matricial.

Proposición 2.2.56. Sea $\|\cdot\|$ una norma vectorial en \mathbb{C}^n , entonces la función $\|A\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow [0, +\infty)$ definida como

$$\|A\| = \max \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^n, x \neq \mathbf{o} \right\}$$

es una norma matricial que denominaremos *norma matricial inducida*. Además, esta norma matricial verifica la siguiente desigualdad para todo x en \mathbb{C}^n ,

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|. \tag{4}$$

Demostración. En primer lugar, observemos que

$$\left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} : x \in \mathbb{C}^n, x \neq \mathbf{o} \right\} = \{\|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\},$$

cuyo máximo existe por ser $f(x) = \|Ax\|$ una función continua y el conjunto $C = \{x \in \mathbb{C}^n : \|x\| = 1\}$ compacto.

Probemos ahora que se cumple la desigualdad $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ para todo x en \mathbb{C}^n . Si $x = \mathbf{o}$ es claro que se verifica la igualdad mientras que para $x \neq \mathbf{o}$ tenemos que

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Leftrightarrow \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

lo cual se verifica por la definición de $\|A\|$ y termina la prueba.

Veamos que verifica las propiedades de norma matricial:

1. $\|Ax\| \geq 0$ para todo x en C , luego $\|A\| \geq 0$.

Si $\|A\| = 0$ entonces $\|Ax\| = 0$ para todo x en C , luego $A = \mathbf{0}$.

2. Sabemos que $\|\alpha Ax\| = |\alpha| \|Ax\|$ para todo x en \mathbb{C}^n y para todo α en \mathbb{C} , luego,

$$\max \{ \|\alpha Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1 \} = |\alpha| \max \{ \|Ax\| : x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1 \},$$

es decir

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

3. Tenemos que $\|A + B\| = \|(A + B)x_0\|$ para algún vector x_0 tal que $\|x_0\| = 1$. Luego,

$$\|A + B\| = \|(A + B)x_0\| \leq \|Ax_0\| + \|Bx_0\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

como queríamos probar.

4. Tenemos que $\|AB\| = \|ABx_0\|$ para algún vector x_0 tal que $\|x_0\| = 1$. Por (4) se cumple que

$$\|AB\| = \|ABx_0\| \leq \|A\| \|Bx_0\| \leq \|A\| \|B\| \|x_0\| = \|A\| \|B\|,$$

como queríamos probar.

□

Ejemplo 2.2.57.

La norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_1$ es la siguiente

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : j = 1, \dots, n \right\},$$

para A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Para todo x tal que $\|x\|_1 = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i,j} |x_j| |a_{ij}| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right) \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : j = 1, \dots, n \right\} = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : j = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

luego,

$$\|A\|_1 \leq \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : j = 1, \dots, n \right\}.$$

Por otro lado, tenemos que $\|e_j\|_1 = 1$ para todo j , luego, $\|A\|_1 \geq \|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ para todo j , lo que prueba que

$$\|A\|_1 \geq \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| : j = 1, \dots, n \right\}.$$

Ejemplo 2.2.58.

La norma matricial inducida por la norma vectorial $\|\cdot\|_\infty$ es la siguiente

$$\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, n \right\},$$

para A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Para todo x tal que $\|x\|_\infty = 1$ se tiene que

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

luego,

$$\begin{aligned} \|Ax\|_\infty &= \max \{ |(Ax)_i| : i = 1, \dots, n \} = \max \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| : i = 1, \dots, n \right\} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, n \right\}, \end{aligned}$$

de donde

$$\|A\|_\infty \leq \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, n \right\}.$$

Por otro lado, considerando el vector z_k en \mathbb{C}^n definido como

$$(z_k)_i = \begin{cases} \frac{\overline{a_{ki}}}{|a_{ki}|} & \text{si } a_{ki} \neq 0, \\ 1 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

que cumple que $\|z_k\|_\infty = 1$ y $a_{ki}(z_k)_i = |a_{ki}|$. Luego, para todo k se tiene que

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &\geq \|Az_k\|_\infty = \max \{|(Az_k)_i| : i = 1, \dots, n\} = \\ &= \max \left\{ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(z_k)_j \right| : i = 1, \dots, n \right\} \geq \sum_{j=1}^n a_{kj}(z_k)_j = \sum_{j=1}^n |a_{kj}|, \end{aligned}$$

de donde

$$\|A\|_\infty \geq \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| : i = 1, \dots, n \right\}.$$

Las siguientes proposiciones muestran el estrecho vínculo existente entre las normas matriciales y el radio espectral.

Proposición 2.2.59. *Sea $\|\cdot\|$ una norma matricial cualquiera, entonces se cumple que*

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

Demostración. Sea x vector propio asociado a λ tal que $|\lambda| = \rho$ y consideremos X en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matriz cuyas columnas están compuestas por el vector x por lo que $AX = \lambda X$. Luego,

$$\rho\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|,$$

de donde se deduce la desigualdad buscada. \square

Proposición 2.2.60. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\epsilon > 0$ entonces existe una norma matricial $\|\cdot\|$ tal que*

$$\|A\| < \rho(A) + \epsilon.$$

Demostración. Sea $A = UTU^*$ la factorización de Schur de la matriz A con U unitaria y T triangular superior cuya diagonal posee los valores propios de A . Para $D_t = \text{diag}(t, t^2, \dots, t^n)$, se tiene que

$$D_t T D_t^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & t^{-1}t_{12} & t^{-2}t_{13} & \dots & t^{-n+1}t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & t^{-1}t_{23} & \dots & t^{-n+2}t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & t^{-n+3}t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego, para t suficientemente grande tenemos que $\sum_{i < j} |(D_t T D_t^{-1})_{ij}| < \epsilon$, luego,

$$\|D_t T D_t^{-1}\|_1 < \rho(A) + \epsilon.$$

Definamos entonces para dicho t la norma matricial siguiente

$$\|M\| = \left\| \|D_t U^* M U D_t^{-1}\|_1 \right\|,$$

que resulta norma matricial por la observación 2.2.54 y cumple que

$$\|A\| = \left\| \|D_t T D_t^{-1}\|_1 \right\| < \rho(A) + \epsilon$$

como queríamos probar. \square

Observación 2.2.61. La dos últimas proposiciones nos permiten concluir que

$$\rho(A) = \inf\{\|A\| : \|\cdot\| \text{ norma matricial}\}.$$

Tenemos una norma (vectorial) definida en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{mn}$, lo cual nos permite hablar de convergencia en este espacio. Recordemos que todas las normas en \mathbb{C}^n son equivalentes, por lo cual una sucesión es convergente a un elemento independientemente de la norma que estemos considerando.

Definición 2.2.62. Sean $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ y $\|\cdot\|$ una norma vectorial en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$; decimos que A_k converge a A y escribimos $\lim_k A_k = A$ si

$$\lim_k \|A_k - A\| = 0.$$

Teorema 2.2.63. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se cumple que $\lim_k A^k = \mathbf{0}$ si, y sólo si, $\rho = \rho(A) < 1$.

Demostración. (\Rightarrow) Sea λ valor propio de A tal que $|\lambda| = \rho$ y v vector propio asociado. Tenemos que

$$A^k v = \lambda^k v.$$

Luego,

$$0 \leq |\lambda|^k \|v\|_\infty = \|\lambda^k v\|_\infty = \|A^k v\|_\infty \leq \|A^k\|_\infty \cdot \|v\|_\infty$$

Sabemos que $\lim_k \|A^k\|_\infty = 0$, luego, $\lim_k |\lambda|^k = 0$ de donde se deduce que $\rho = |\lambda| < 1$.

(\Leftarrow) Tenemos que $\rho < 1$, luego, por la proposición 2.2.60 tenemos que existe una norma matricial $\|\cdot\|$ que verifica que $\|A\| < \rho + (1 - \rho) = 1$ de donde se deduce que

$$\lim_k \|A^k\| \leq \lim_k \|A\|^k = 0$$

y termina la prueba. \square

Probemos ahora algunos lemas que serán necesarios para demostrar los Teoremas de Perron y Perron-Frobenius.

Lema 2.2.64. Sean A en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, x en \mathbb{C}^n y λ en \mathbb{C} . Se tiene que $|\lambda x| = |\lambda| |x|$ y $|Ax| \leq |A| |x|$.

Demostración. Para todo $i = 1, \dots, n$ se cumple que $|\lambda x|_i = |\lambda x_i| = |\lambda| |x_i| = (|\lambda| |x|)_i$ lo que prueba que $|\lambda x| = |\lambda| |x|$. A su vez, $|Ax|_i = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| = (|A| |x|)_i$ lo que prueba que $|Ax| \leq |A| |x|$. \square

Lema 2.2.65. Sean $A, B > \mathbf{0}$ en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, sean $x, y \geq \mathbf{0}$ en \mathbb{C}^n .

1. Si $x \neq \mathbf{0}$ entonces $Ax > \mathbf{0}$.
2. Si $x > y$ entonces se cumple que $Ax > Ay$.
3. Si $A \geq B$ entonces se cumple que $Ax \geq Bx$.

Demostración. 1. Sea j_0 en $\{1, \dots, n\}$ tal que $x_{j_0} > 0$. Para todo $i = 1, \dots, m$ se cumple que $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq a_{ij_0}x_{j_0} > 0$ lo que prueba que $Ax > \mathbf{0}$.

2. Para todo $i = 1, \dots, m$ se cumple que $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j = (Ay)_i$ lo que prueba que $Ax > Ay$.

3. Para todo $i = 1, \dots, m$ se cumple que $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j = (Bx)_i$ lo que prueba que $Ax \geq Bx$. □

Lema 2.2.66. Sea $A > \mathbf{0}$ en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$, λ valor propio de A tal que $|\lambda| = \rho$ y x vector propio asociado a λ , entonces se cumple que $|x|$ es un vector propio asociado a ρ y $|x| > \mathbf{0}$.

Demostración. Tenemos que $|Ax| = |\lambda x| = |\lambda||x| = \rho|x|$, por otro lado sabemos que $|Ax| \leq |A||x| = A|x|$ de donde se deduce que

$$\rho|x| \leq A|x|.$$

Sea $w = A|x| - \rho|x| \geq \mathbf{0}$. Veamos que $w = \mathbf{0}$ lo que prueba que $|x|$ es un vector propio asociado a ρ .

Supongamos por absurdo que $w \neq \mathbf{0}$, tenemos que $A > \mathbf{0}$ y $w \geq \mathbf{0}$, por la parte 1 del lema 2.2.65 tenemos que $Aw > \mathbf{0}$. Análogamente, tenemos que $A|x| > \mathbf{0}$ y podemos considerar $\epsilon > 0$ tal que $Aw > \epsilon A|x|$, esto es,

$$A(A|x| - \rho|x|) > \epsilon A|x|,$$

de donde,

$$\left(\frac{A}{\epsilon + \rho}\right) A|x| > A|x|$$

y por la parte 2 del lema 2.2.65 se obtiene que

$$\left(\frac{A}{\epsilon + \rho}\right)^k A|x| > A|x| \quad \text{para todo } k. \tag{5}$$

Por otro lado, por la observación 2.2.48 tenemos que $\rho \left(\frac{A}{\epsilon + \rho}\right) = \frac{\rho}{\epsilon + \rho} < 1$, y por el Teorema 2.2.63 que $\lim_k \left(\frac{A}{\epsilon + \rho}\right)^k = \mathbf{0}$. De la ecuación (5) obtenemos que $A|x| \leq \mathbf{0}$ lo cual es absurdo.

Hemos probado que $|x|$ es un vector propio asociado a ρ , tenemos que $A > \mathbf{0}$ y $|x| \geq \mathbf{0}$ no nulo, por la parte 1 del lema 2.2.65 tenemos que $\rho|x|_i = (A|x|)_i > 0$ y en consecuencia $|x| > \mathbf{0}$ lo que termina la prueba. □

Teorema 2.2.67. (Perron) Sean $A > \mathbf{0}$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\rho = \rho(A)$ su radio espectral. Se cumple que:

1. $\rho > 0$ y existe $z > \mathbf{0}$ vector propio asociado a ρ .
2. ρ es valor propio simple de A .
3. Existe un único vector propio p asociado al valor propio ρ tal que $p > \mathbf{0}$ y $\|p\|_1 = 1$ que denominaremos vector de Perron.
4. Si $Ax = \lambda x$ con $x \geq \mathbf{0}$ y $x \neq \mathbf{0}$ entonces $\lambda = \rho$ y $x > \mathbf{0}$.
5. $\rho = \max\{f(x) : x \in \mathcal{N}\}$ donde $f(x) = \min\left\{\frac{(Ax)_i}{x_i} : x_i \neq 0, i = 1, \dots, n\right\}$ y $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{C}^n : x \geq \mathbf{0}, x \neq \mathbf{0}\}$

Demostración.

1. Sabemos que $\rho \geq 0$. Si $\rho = 0$ tendríamos que $Sp_A = [0^{(n)}]$ y en consecuencia $tr(A) = 0$ lo cual es absurdo por ser $A > \mathbf{0}$.

Probemos ahora que existe un vector propio asociado a ρ de coordenadas positivas.

Por el lema 2.2.66 sabemos que si λ es valor propio de A tal que $|\lambda| = \rho$ y x vector propio asociado a λ , entonces $|x|$ es el vector propio asociado a ρ de coordenadas positivas.

2. Sea $B = \frac{1}{\rho}A$, por la observación 2.2.48 tenemos que $\rho(B) = 1$, además se cumple que $ma_B(1) = ma_A(\rho) = m$ y $mg_B(1) = mg_A(\rho) = l$. Por el Teorema 2.2.30, sabemos que existe P en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertible tal que $P^{-1}BP = J$ donde J es una matriz de Jordan con un bloque de Jordan asociado al valor propio 1 de tamaño $m \times m$ compuesto por l sub-bloques. Probaremos en primer lugar que $mg_B(1) = ma_B(1)$ y luego que $mg_B(1) = 1$ lo que prueba que 1 es un valor propio simple de B , es decir, que ρ es un valor propio simple de A .

Supongamos por absurdo que existe un sub-bloque sJ que compone el bloque de Jordan asociado al valor propio 1 de tamaño $r \geq 2$, luego,

$$sJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (sJ)^k = \begin{pmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \dots & \binom{k}{r-1} \\ 0 & 1 & \binom{k}{1} & \dots & \binom{k}{r-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{k}{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Se tiene que $\|J^k\|_\infty \geq \|(sJ)^k\|_\infty \geq k$, por lo que $\lim_k \|J^k\|_\infty = \infty$, veamos que esto implica que $\lim_k \|B^k\|_\infty = \infty$. En efecto,

$$\|J^k\|_\infty = \|P^{-1}B^kP\|_\infty \leq \|P^{-1}\|_\infty \|B^k\|_\infty \|P\|_\infty,$$

luego,

$$\frac{\|J^k\|_\infty}{\|P^{-1}\|_\infty \|P\|_\infty} \leq \|B^k\|_\infty$$

y se tiene que $\lim_k \|B^k\|_\infty = \infty$.

Por la parte anterior tenemos que existe $z > \mathbf{0}$ vector propio de B asociado al valor propio 1, luego, $B^k z = z$ para todo k .

Por el ejemplo 2.2.58 se tiene que $\|B^k\|_\infty = \sum_{j=1}^n b_{i_0 j}^{(k)}$ para algún i_0 . Luego,

$$\begin{aligned} \|z\|_\infty \geq z_{i_0} &= \sum_{j=1}^n b_{i_0 j}^{(k)} z_j \geq \min\{z_j : j = 1, \dots, n\} \sum_{j=1}^n b_{i_0 j}^{(k)} \geq \\ &\min\{z_j : j = 1, \dots, n\} \|B^k\|_\infty, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo pues implicaría que $\|B^k\|_\infty$ se encuentra acotado y prueba que $mg_B(1) = ma_B(1)$.

Veamos ahora que $ma_B(1) = 1$, por absurdo supongamos que existen dos vectores propios de B x e y asociados al valor propio 1 que conforman un conjunto L.I. y sea $z = x - \frac{x_i}{y_i} y$ con i tal que $y_i \neq 0$. Tenemos que $Bz = z$ y por la afirmación probada en la parte anterior tenemos que $|z|$ es un vector propio de coordenadas positivas asociado al valor propio 1. Sin embargo, $|z|_i = |z_i| = 0$ lo cual es absurdo y prueba que $ma_B(1) = 1$.

3. Sabemos que $mg(\rho) = 1$ por lo cual $S_\rho = [z]$ con z vector propio que podemos suponer de coordenadas positivas. Sea $p = \frac{1}{\|z\|_1} z$, es claro que $p > \mathbf{0}$ y $\|p\|_1 = 1$. Veamos ahora que es el único, sea q vector propio de A asociado a ρ tal que $q > \mathbf{0}$ y $\|q\|_1 = 1$. Tenemos que $q = \alpha z = \alpha \|z\|_1 p$, luego,

$$1 = \|q\|_1 = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \alpha \|z\|_1 p_i = \alpha \|z\|_1 \sum_{i=1}^n p_i = \alpha \|z\|_1 \|p\|_1 = \alpha \|z\|_1,$$

por lo que $q = p$ y termina la prueba.

4. Sea $x \geq \mathbf{0}$, $x \neq \mathbf{0}$ tal que $Ax = \lambda x$, sea $q > \mathbf{0}$ el vector de Perron de A^t , se puede ver que $q^t A = \rho q^t$, luego,

$$q^t Ax = \rho q^t x \Leftrightarrow \lambda q^t x = \rho q^t x$$

y por ser $q^t x > 0$ se obtiene que $\lambda = \rho$.

5. Sea x en \mathcal{N} , veamos que $f(x) \leq \rho$. Sean p y q los vectores de Perron de A y A^t respectivamente, por la definición de f tenemos que $f(x)x_i \leq (Ax)_i$ para todo i en $\{1, \dots, n\}$ tal que $x_i \neq 0$, luego,

$$f(x)x \leq Ax.$$

Multiplicando a izquierda por $q^t > \mathbf{o}$ obtenemos que

$$f(x)q^t x \leq q^t A x \Leftrightarrow f(x)q^t x \leq \rho q^t x$$

y por ser $q^t x > 0$ se obtiene que $f(x) \leq \rho$.

Tenemos entonces que $\max\{f(x) : x \in \mathcal{N}\} \leq \rho$.

Por otro lado $p \in \mathcal{N}$ por lo que $\max\{f(x) : x \in \mathcal{N}\} \geq f(p) = \rho$ lo que termina la prueba. □

Observación 2.2.68. Sean A, B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La parte 5 del Teorema 2.2.67 junto con el lema 2.2.65 prueba que si $A \geq B > \mathbf{o}$ entonces $\rho(A) \geq \rho(B)$.

Algunos de los ítems del Teorema anterior pueden extenderse a matrices no negativas como veremos a continuación.

Teorema 2.2.69. (*Perron para matrices no negativas*) Sean $A \geq \mathbf{o}$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\rho = \rho(A)$ su radio espectral. Se cumple que:

1. $\rho \geq 0$ y existe $z \geq \mathbf{o}$ vector propio asociado a ρ .
2. $\rho = \max\{f(x) : x \in \mathcal{N}\}$ donde $f(x) = \min\left\{\frac{(Ax)_i}{x_i} : x_i \neq 0, i = 1, \dots, n\right\}$ y $\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{C}^n : x \geq \mathbf{o}, x \neq \mathbf{o}\}$

Demostración. Consideremos $A_k = A + \frac{1}{k}J > \mathbf{o}$, sean ρ_k y p_k el radio espectral y el vector de Perron de A_k respectivamente.

1. Tenemos que $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión incluida en $X = \partial B \cap \{x \in \mathbb{C}^n : x \geq \mathbf{o}\}$ siendo B la bola de centro \mathbf{o} y radio 1 según la norma 1. Por la compacidad de X tenemos que existe una subsucesión $\{p_{k_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergente a un elemento z en X , de donde obtenemos que $z \geq \mathbf{o}$ y $\|z\|_1 = 1$.

Tenemos que $A_k > A_{k+1} \geq A$ para todo k , por la observación 2.2.68 se cumple que $\rho_k \geq \rho_{k+1} \geq \rho$ para todo k , luego, la sucesión $\{\rho_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ resulta decreciente y acotada inferiormente, por lo cual converge a un elemento $\rho^* \geq \rho$.

Tenemos que

$$\lim_i A_{k_i} p_{k_i} = Az,$$

por otro lado

$$\lim_i A_{k_i} p_{k_i} = \lim_i \rho_{k_i} p_{k_i} = \rho^* z,$$

por lo cual $Az = \rho^* z$. Hemos probado que ρ^* es un valor propio de A y en consecuencia $\rho^* \leq \rho$. Finalmente $\rho^* = \rho$ y $z \geq \mathbf{o}$ es un vector propio asociado.

2. Sea q_k el vector de Perron de A_k^t , se tiene que $q_k^t A_k = \rho_k q_k^t$.

Sea x en \mathcal{N} . Por la definición de f se cumple que $f(x)x \leq Ax$ y también se tiene que $Ax \leq A_k x$ por el lema 2.2.65, luego $f(x)x \leq A_k x$. Multiplicando por q_k^t obtenemos que

$$f(x)q_k^t x \leq q_k^t A_k x \Leftrightarrow f(x)q_k^t x \leq \rho_k q_k^t x,$$

como $q_k^t x > 0$ se obtiene que $f(x) \leq \rho_k$ y tomando límite obtenemos que $f(x) \leq \rho^* = \rho$. Finalmente,

$$\text{máx}\{f(x) : x \in \mathcal{N}\} \leq \rho$$

Por otro lado $z \in \mathcal{N}$ por lo cual $\text{máx}\{f(x) : x \in \mathcal{N}\} \geq f(z) = \rho$ lo que termina la prueba. □

Veamos que condiciones adicionales debe cumplir una matriz no negativa para verificar la tesis del Teorema de Perron.

Definición 2.2.70. Una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dice *reducible* si existe una matriz de permutación P tal que la matriz PAP^t tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{pmatrix}$$

donde X e Y son matrices cuadradas. En caso contrario se dice que la matriz A es *irreducible*.

Observación 2.2.71. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A es irreducible si y sólo si A^t lo es.

Observación 2.2.72. Si A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es irreducible entonces no posee filas ni columnas nulas.

El teorema que presentaremos a continuación caracteriza las matrices irreducibles y será demostrado en la sección siguiente.

Teorema 2.2.73. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La matriz A es irreducible si y sólo si $(I + |A|)^{n-1} > \mathbf{0}$

Teorema 2.2.74. (Perron-Frobenius) Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \geq \mathbf{0}$ e irreducible. Sea $\rho = \rho(A)$ su radio espectral. Se cumple que:

1. $\rho > 0$ y existe $z > \mathbf{0}$ vector propio asociado a ρ .
2. $ma(\rho) = 1$.
3. Existe un único vector propio p asociado al valor propio ρ tal que $p > \mathbf{0}$ y $\|p\|_1 = 1$
4. Si $Ax = \lambda x$ con $x \geq \mathbf{0}$ y $x \neq \mathbf{0}$ entonces $\lambda = \rho$ y $x > \mathbf{0}$.

5. El espectro de la matriz es invariante por la rotación en el plano complejo de centro en el origen y ángulo $\frac{2\pi}{l}$ siendo $l = \#\{\lambda : |\lambda| = \rho\}$, esto es,

$$R_{0, \frac{2\pi}{l}}(Sp_A) = Sp_A.$$

Demostración. 1. Por el Teorema 2.2.69 sabemos $\rho \geq 0$ y existe $z \geq \mathbf{o}$ vector propio asociado a ρ , además se cumple que

$$\rho = \max\{f(x) : x \in \mathcal{N}\}.$$

Consideremos $u = \frac{1}{n}\mathbf{1}$ en \mathcal{N} , luego tenemos que

$$\rho \geq f(u) = \min\left\{\frac{(Au)_i}{u_i} : i = 1, \dots, n\right\} = \min\left\{\sum_{j=1}^n a_{ij} : i = 1, \dots, n\right\}.$$

Por la observación 2.2.72 tenemos que ninguna de las filas en A es nula, luego $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$ para todo i de donde se deduce que $\rho > 0$.

Veamos ahora que $z > \mathbf{o}$. Tenemos que

$$(I + A)^{n-1}z = (1 + \rho)^{n-1}z.$$

A su vez, por el Teorema 2.2.73 sabemos que $(I + A)^{n-1} > \mathbf{o}$ y aplicando la parte 4 del Teorema 2.2.67 obtenemos que $z > \mathbf{o}$.

2. *Afirmación.* Sea B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \geq \mathbf{o}$ tal que $B^m > \mathbf{o}$ para algún m en \mathbb{N} , entonces $ma(\rho) = 1$.

Por la proposición 2.2.44 sabemos que si $Sp_B = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ entonces $Sp_{B^m} = [\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m]$, luego, se cumple que $ma_{B^m}(\rho^m) \geq ma_B(\rho) > 1$ lo cual es absurdo pues $\rho(B^m) = \rho^m$ y $B^m > \mathbf{o}$.

Tenemos que $A \geq 0$ y por el Teorema 2.2.73 tenemos que $(I + A)^{n-1} > \mathbf{o}$, por la afirmación, $ma_{I+A}(\rho(I + A)) = 1$. A su vez, se cumple que $ma_{I+A}(\rho(I + A)) = ma_A(\rho(A))$ lo que termina la prueba.

3. Sabemos que $mg(\rho) = 1$ por lo cual $S_\rho = [z]$ con z vector propio que podemos suponer de coordenadas positivas. Sea $p = \frac{1}{\|z\|_1}z$, es claro que $p > \mathbf{o}$ y $\|p\|_1 = 1$. Veamos ahora que es el único, sea q vector propio de A asociado a ρ tal que $q > \mathbf{o}$ y $\|q\|_1 = 1$. Tenemos que $q = \alpha z = \alpha\|z\|_1 p$, luego,

$$1 = \|q\|_1 = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \alpha\|z\|_1 p_i = \alpha\|z\|_1 \sum_{i=1}^n p_i = \alpha\|z\|_1 \|p\|_1 = \alpha\|z\|_1,$$

por lo que $q = p$ y termina la prueba.

4. Sea $x \geq \mathbf{o}$, $x \neq \mathbf{o}$ tal que $Ax = \lambda x$, sea $q > \mathbf{o}$ el vector de Perron de A^t , se puede ver que $q^t A = \rho q^t$, luego,

$$q^t Ax = \rho q^t x \Leftrightarrow \lambda q^t x = \rho q^t x$$

y por ser $q^t x > 0$ se obtiene que $\lambda = \rho$.

5. *Afirmación.* Sean A y B en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\rho = \rho(A)$. Si A irreducible y $\mathbf{0} \leq |B| \leq A$ entonces se cumple que

- $|\lambda| \leq \rho$ para todo λ valor propio de B .
- $|\lambda| = \rho$ para algún λ valor propio de $B \Leftrightarrow B = e^{\theta i} D A D^{-1}$ con $e^{\theta i} = \frac{\lambda}{\rho}$ y $|D| = I_n$.

En efecto, si λ es un valor propio de B e y un vector propio asociado, se cumple que $B y = \lambda y$, luego,

$$|\lambda| |y| = |\lambda y| \leq |B y| \leq |B| |y| \leq A |y|, \quad (6)$$

por lo cual

$$|\lambda| \leq \frac{(A|y|)_i}{|y|_i} \quad \text{para todo } i \text{ tal que } |y|_i \neq 0.$$

Por el Teorema 2.2.69 tenemos que

$$|\lambda| \leq f(|y|) \leq \rho$$

lo que prueba el primer ítem de la afirmación.

Probemos el segundo ítem. El recíproco es claro, por lo que probaremos el directo. Consideremos λ tal que $|\lambda| = \rho$ e y un vector propio asociado, sustituyendo en (6) tenemos que

$$\rho |y| \leq A |y|,$$

Por el lema 2.2.66 tenemos que $|y|$ es un vector propio de $(I + A)^n$ asociado a $(1 + \rho)^n$ de donde se deduce que $|y|$ es un vector propio de A asociado a ρ . En particular, $|y| > \mathbf{0}$. Sustituyendo en (6) obtenemos

$$B |y| = A |y|,$$

como además $|B| \leq A$ e $y > \mathbf{0}$ se obtiene que

$$|B| = A.$$

Expresemos en polares las coordenadas del vector y y el valor propio λ

$$\begin{aligned} y_j &= |y_j| e^{\theta_j i} \text{ con } j = 1, \dots, n, \\ \lambda &= \rho e^{\theta i}. \end{aligned}$$

Sea $D = \text{diag}(e^{\theta_1 i}, \dots, e^{\theta_n i})$, luego $y = D |y|$ por lo cual

$$B D |y| = \lambda D |y| = \rho e^{\theta i} D |y|,$$

de donde,

$$e^{-\theta i} D^{-1} B D |y| = \rho |y| = A |y|. \quad (7)$$

Sea $C = e^{-\theta i} D^{-1} B D$, luego (7) resulta

$$C|y\rangle = A|y\rangle.$$

A su vez, se tiene que $|C\rangle = |B\rangle = A$, por lo cual $C|y\rangle = A|y\rangle = |B||y\rangle = |C||y\rangle$. Como además $|y\rangle > \mathbf{o}$ se cumple que $C = |C\rangle = A$, es decir,

$$e^{-\theta i} D^{-1} B D = A \Leftrightarrow B = e^{\theta i} D A D^{-1}$$

lo que termina de probar la afirmación.

Sea $[\lambda : |\lambda| = \rho] = [\lambda_0, \dots, \lambda_{l-1}]$ tales que

$$\lambda_j = \rho e^{\theta_j i} \quad \text{y} \quad 0 = \theta_0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_{l-1} < 2\pi.$$

Utilizando la afirmación con $B = A$ para $j = 1, \dots, n$ se obtiene que

$$A = e^{\theta_j i} D_j A D_j^{-1} \tag{8}$$

con $|D_j\rangle = I_n$. Luego $S_{p_A} = e^{\theta_j i} S_{p_A}$ de donde se deduce que $\lambda_j = \rho e^{\theta_j i}$ es simple, en particular $0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{l-1} < 2\pi$. Sea $z > \mathbf{o}$ un vector propio asociado a ρ , tenemos que $D_j z$ es un vector propio asociado a λ_j , puesto que

$$A D_j z = \rho e^{\theta_j i} D_j z = \lambda_j D_j z.$$

Dado que $\dim(S_{\lambda_j}) = 1$ los vectores de este subespacio (y como consecuencia la matriz D_j) quedan únicamente determinados si imponemos la condición

$$(D_j z)_1 = z_1 \Leftrightarrow (D_j)_{11} = 1.$$

A su vez, tenemos que

$$A = e^{(\theta_j \pm \theta_k) i} D_j D_k^{\pm 1} A D_k^{\pm 1} D_j^{-1},$$

por lo cual $D_j D_k^{\pm 1} z$ es vector propio asociado a $\rho e^{(\theta_j \pm \theta_k) i}$, luego,

$$e^{\theta_j i} e^{\theta_k i} = e^{\theta_l i} \quad \text{y} \quad e^{\theta_j i} e^{-\theta_k i} = e^{\theta_{l'} i}.$$

Como además se cumple que $(D_j D_k^{\pm 1})_{11} = 1$, se tiene que

$$D_j D_k = D_l \quad \text{y} \quad D_j D_k^{-1} = D_{l'}.$$

Tenemos entonces que tanto el conjunto $\{e^{\theta_0}, \dots, e^{\theta_{l-1}}\}$ con el producto de complejos, como el conjunto $\{D_0, \dots, D_{l-1}\}$ con el producto de matrices conforman grupos isomorfos de orden l . Dado que todos los elementos tienen orden l , el conjunto $\{e^{\theta_0}, \dots, e^{\theta_{l-1}}\}$ coincide con el conjunto de raíces l -ésimas de la unidad, luego,

$$\theta_j = \frac{2\pi}{l} j = \theta_1 j \quad e^{\theta_j i} = e^{\theta_1 j i} = (e^{\theta_1 i})^j.$$

Por isomorfismo de grupos se tiene que

$$D_j = (D_1)^j = D^j,$$

y la ecuación (8) resulta

$$A = e^{\frac{2\pi}{l}i} D A D^{-1}.$$

Finalmente, se tiene que $S p_A = e^{\frac{2\pi}{l}i} S p_A$ por lo cual $R_{o, \frac{2\pi}{l}}(S p_A) = S p_A$ lo que termina la prueba.

□

2.3. Teoría espectral de digrafos

Los resultados de esta sección pueden encontrarse en [9] y [7].

Como mencionamos anteriormente, la Teoría algebraica de digrafos consiste en asociarle a un digrafo un objeto algebraico cuyo estudio aporte información sobre el digrafo y viceversa. En esta sección, asociaremos a cada digrafo una matriz cuadrada, de la cual estudiaremos particularmente su espectro.

Una matriz naturalmente asociada a un digrafo es la *matriz de adyacencia*.

Definición 2.3.1. Sea $D = (V, E)$ y enumeremos los vértices de modo que $V = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Denominamos *matriz de adyacencia* del digrafo D a la matriz $A(D) = A$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E. \end{cases}$$

Observación 2.3.2. Un digrafo D es un grafo si, y sólo si, A es simétrica. Luego, la matriz de adyacencia de un grafo resulta simétrica y por el corolario 2.2.26 ortogonalmente diagonalizable.

Observación 2.3.3. \tilde{D} es un subdigrafo inducido de D si, y sólo si, $A(\tilde{D})$ es submatriz principal de $A(D)$.

Observación 2.3.4. La suma de los elementos de la fila i de A es el grado de salida del vértice i -ésimo y la suma de los elementos de la columna j es el grado de entrada del vértice j -ésimo, es decir,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = d^+(x_i) = d_i^+, \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = d^-(x_j) = d_j^-.$$

Proposición 2.3.5. Sea D un digrafo y A la matriz de adyacencia, luego,

$$(A^k)_{ij} = \#\{\text{caminos en } D \text{ de largo } k \text{ de } x_i \text{ a } x_j\}.$$

Demostración. Aplicaremos inducción completa en k . Si $k = 1$ tenemos que

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E \Leftrightarrow \text{existe un camino de largo 1 de } x_i \text{ a } x_j, \\ 0 & \text{si } (x_i, x_j) \notin E \Leftrightarrow \text{no existe un camino de largo 1 de } x_i \text{ a } x_j, \end{cases}$$

lo que prueba el paso base.

Supongamos que vale para k y veamos que vale para $k + 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} (A^{k+1})_{ij} &= (A^k A)_{ij} = \sum_{l=1}^n (A^k)_{il} (A)_{lj} = \\ &= \sum_{l=1}^n (\#\{\text{caminos de longitud } k \text{ de } x_i \text{ a } x_l\}) (A)_{lj}. \end{aligned}$$

Dado que todos los caminos de longitud $k + 1$ de x_i a x_j pueden descomponerse en un camino de longitud k de x_i a x_l y un camino de longitud 1 (una arista) de x_l a x_j para algún x_l , se obtiene que

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n (\#\{\text{caminos de longitud } k \text{ de } x_i \text{ a } x_l\})(A)_{lj} &= \\ &= \#\{\text{caminos de longitud } k + 1 \text{ de } x_i \text{ a } x_j\} \end{aligned}$$

lo que prueba el paso inductivo. \square

Es claro que la matriz de adyacencia de un digrafo D puede no ser única ya que dependerá de la enumeración de los vértices. Sin embargo, dadas dos matrices de adyacencia A y A' de un mismo digrafo correspondientes a distintas enumeraciones de los vértices, existe una matriz de permutación P tal que $A' = PAP^t$. Más precisamente, a cada digrafo D se le asocia una familia de matrices

$$\mathcal{F}(D) = \{PA_0P^t : P \text{ matriz de permutación}\}$$

donde A_0 es una matriz de adyacencia fija. Estudiaremos un invariante en particular de esta familia: el espectro, el cual queda dado por el polinomio característico de cualquier matriz en $\mathcal{F}(D)$ que denominaremos *polinomio característico del digrafo*,

$$p_D(x) = p_A(x) = \det(xI - A) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}.$$

Llamaremos *espectro del digrafo* al espectro de cualquier matriz A en $\mathcal{F}(D)$

$$Sp_D = Sp_A = [\lambda_1, \dots, \lambda_n].$$

Observación 2.3.6. Sea D un digrafo y $Sp_D = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]$, como la traza de una matriz es invariante por semejanza obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = tr(A^k) = \#\{\text{caminos cerrados en } D \text{ de largo } k\}.$$

En particular $\sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(A) = 0$ y $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = tr(A^2) = 2c_2$, donde c_2 denota la cantidad de ciclos de largo 2 en D .

Proposición 2.3.7. *Un digrafo D es fuertemente conexo si, y sólo si, $A(D)$ es irreducible.*

Demostración. (\Rightarrow) Supongamos $A(D)$ reducible, luego, existe una matriz de permutación P tal que $PAP^t = A'$ tiene la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{pmatrix}$$

donde X tiene tamaño digamos $r \times r$ y Z tamaño $(n - r) \times (n - r)$. Luego, para cierta enumeración de los vértices $\{x'_1, \dots, x'_n\}$, tenemos que no existen arcos (ni

caminos) de un vértice en $\{x'_{r+1}, \dots, x'_n\}$ a uno en $\{x'_1, \dots, x'_r\}$ por lo que D no es fuertemente conexo, lo cual es absurdo.

(\Leftarrow) Supongamos ahora que D posee $l \geq 2$ componentes conexas. Sea V_i el conjunto de vértices de la i -ésima componente fuertemente conexa y $A_i = A(D_i)$. Ordenando los vértices según la componente fuertemente conexa a la que pertenecen y las componentes de modo tal que no existan arcos de un vértice en V_i a uno en V_j para todo $j < i$, se obtiene que

$$PAP^t = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_l \end{pmatrix}.$$

Considerando $X = A_1$ y $Z = \begin{pmatrix} A_2 & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & A_l \end{pmatrix}$ obtenemos que $PAP^t = \begin{pmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{pmatrix}$

lo que contradice que A sea irreducible. □

Definición 2.3.8. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, el *digrafo asociado* a la matriz A que denotaremos $\Gamma(A)$ es el digrafo $\Gamma(A) = (V, E)$ donde $V = \{1, \dots, n\}$ y $E = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0\}$.

Anteriormente, la asociación de una matriz $A(D)$ a un digrafo D , nos permitió traducir la condición de conexión fuerte en la de irreductibilidad; del mismo modo, la asociación de un digrafo $\Gamma(A)$ a una matriz A , nos permitirá traducir la condición de irreductibilidad en la de conexión fuerte.

Observación 2.3.9. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A es irreducible si y sólo si $\Gamma(A)$ es fuertemente conexo.

Proposición 2.3.10. Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $\Gamma = \Gamma(A)$ su digrafo asociado. Existe un camino en Γ del vértice i al vértice j si y sólo si $(|A|^k)_{ij} > 0$.

Demostración. Al igual que en la prueba de 2.3.5 aplicaremos inducción completa en k .

Si $k = 1$ tenemos que $(|A|)_{ij} > 0$ si, y sólo si, existe una arista de i a j en Γ , es decir, un camino de largo 1 de i a j , lo que prueba el paso base.

Supongamos que vale para k y veamos que vale para $k + 1$. Tenemos que

$$(|A|^{k+1})_{ij} = (|A|^k |A|)_{ij} = \sum_{l=1}^n (|A|^k)_{il} (|A|)_{lj} > 0 \Leftrightarrow$$

$$(|A|^k)_{il} (|A|)_{lj} > 0 \text{ para algún } l \text{ entre } 1 \text{ y } k \Leftrightarrow$$

$$(|A|^k)_{il} > 0 \text{ y } (|A|)_{lj} > 0 \text{ para algún } l.$$

Por hipótesis inductiva se tiene que existe un camino de largo k de i a l y una arista de l a j en Γ , luego, existe un camino de largo $k + 1$ de i a j lo que prueba el paso inductivo. □

Con estas herramientas estamos en condiciones de probar el Teorema 2.2.73 que establecía que una matriz A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es irreducible si y sólo si $(I + |A|)^{n-1} > \mathbf{0}$.

Demostración. Se tiene que

$$[(I + |A|)^{n-1}]_{ij} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (|A|^k)_{ij}.$$

(\Rightarrow) Si A es irreducible entonces se tiene que $\Gamma(A)$ es fuertemente conexo, luego, existe un camino del vértice i al vértice j para todo i, j , que además resulta de longitud menor o igual a $n - 1$. Por la proposición 2.3.10 se cumple $|A|_{ij}^k > 0$ para algún $k = 1, \dots, n - 1$ por lo cual $[(I + |A|)^{n-1}]_{ij} > 0$, esto es, $(I + |A|)^{n-1} > \mathbf{0}$.

(\Leftarrow) Para todo i, j se cumple que $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (|A|^k)_{ij} > 0$. Necesariamente existe k entre 0 y n tal que $(|A|^k)_{ij} > 0$ y como consecuencia, un camino (de largo k) de i a j lo que prueba que el digrafo Γ es fuertemente conexo. \square

Definición 2.3.11. Sea D un digrafo, el *índice del digrafo* que denotaremos $\rho(D)$ es el radio espectral de $A(D)$.

La siguiente proposición nos permitirá, en muchos casos, reducir el estudio de ciertas propiedades espectrales del digrafo a la de sus componentes fuertemente conexas.

Proposición 2.3.12. Sea D un digrafo y D_1, \dots, D_l los subdigrafos generados por los vértices de cada componente fuertemente conexa. Entonces, $p_D = \prod_{i=1}^l p_{D_i}$ y $Sp_D = \sqcup_{i=1}^l Sp_{D_i}$.

Demostración. Sea V_i el conjunto de vértices de la i -ésima componente fuertemente conexa y $A_i = A(D_i)$, podemos suponer que las componentes están ordenadas de modo tal que no existan arcos de un vértice en V_i a uno en V_j para todo $j < i$, luego la matriz de adyacencia tiene la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_l \end{pmatrix}$$

de donde se deduce que $p_D = \prod_{i=1}^l p_{D_i}$ y $Sp_D = \sqcup_{i=1}^l Sp_{D_i}$. \square

Observación 2.3.13. En la prueba anterior podríamos suponer que las componentes están ordenadas de modo tal que no existan arcos de un vértice en V_i a uno en V_j para todo $i < j$ en lugar de para todo $j < i$.

Lema 2.3.14. Si $D = (V, E)$ es un digrafo y $\Delta^+ = \max\{d^+(x) : x \in V\}$ entonces $\rho(D) \leq \Delta^+$.

Demostración. Observemos en primer lugar que si $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ es un vector propio de $A = A(D)$ asociado al valor propio λ se obtiene que $\lambda v_i = (Av)_i = \sum_{j/(x_i, x_j) \in E} v_j$, luego,

$$|\lambda| |v_i| \leq \sum_{\substack{j/ \\ (x_i, x_j) \in E}} |v_j|.$$

Consideremos i_0 tal que $|v_{i_0}| \geq |v_i|$ para todo i , luego,

$$|\lambda| |v_{i_0}| \leq \Delta^+ |v_{i_0}|,$$

y por ser $|v_{i_0}| > 0$ obtenemos que $|\lambda| \leq \Delta^+$ para todo valor propio λ , de donde

$$\rho(D) \leq \Delta^+,$$

como queríamos probar. □

Proposición 2.3.15. *Si D es un digrafo k -salida regular entonces $\rho(D) = k$. Además, $ma(k) = l$ donde l es la cantidad de componentes fuertemente conexas del digrafo.*

Demostración. Estudiemos en primer lugar el caso en el que D es un digrafo fuertemente conexo. Tenemos que la matriz $A = A(D)$ es irreducible y sus entradas son no negativas por ser la matriz de adyacencia de un digrafo.

Sea $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^t$, se tiene que

$$A\mathbb{1} = k\mathbb{1}.$$

Luego, $\mathbb{1}$ es vector propio de A asociado al valor propio k . Por el Teorema 2.2.74 de Perron-Frobenius tenemos que el único valor propio que posee un vector propio asociado de entradas no negativas es el índice, luego, $\rho(D) = \rho(A) = k$ y su multiplicidad algebraica igual a 1.

En el caso general, llamamos D_1, \dots, D_l a los subgrafos generados por los vértices de cada componente fuertemente conexa, que podemos suponer ordenados de modo tal que no existan arcos de un vértice en V_i a uno en V_j para todo $i < j$. Luego, D_i resulta salida regular y fuertemente conexo para todo $i = 1, \dots, l$. Por el caso anterior tenemos que $\rho(D_i) = k$, además de ser un valor propio simple para D_i . Por la proposición 2.3.12 tenemos que $Sp_D = \sqcup_{i=1}^l Sp_{D_i}$ de donde

$$\rho(D) = \max\{\rho(D_i) : i = 1, \dots, l\} = k.$$

A su vez, $p_D = \prod_{i=1}^l p_{D_i}$ por lo cual $ma(\rho(D)) = \sum_{i=1}^l ma(\rho(D_i)) = l$ lo que termina la prueba. □

El siguiente Teorema constituye un pilar fundamental en la Teoría espectral de digrafos, ya que nos permite calcular los coeficientes del polinomio característico del digrafo a partir de la estructura del mismo. En particular, este resultado probado por Horst Sachs en [12] muestra la fuerte relación que existe entre el espectro de un digrafo y su estructura.

Teorema 2.3.16. (Coeficientes de Sachs)

Sea D un digrafo y a_i con $i = 1, \dots, n$ los coeficientes de su polinomio característico, es decir, $p_D(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$. Se cumple que

$$a_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i &= \{\text{subdigrafos lineales de } D \text{ con } i \text{ vértices}\}, \\ p(L) &= \#\{\text{componentes fuertemente conexas de } L\}. \end{aligned}$$

Demostración. Comencemos por probar la igualdad para a_n , tenemos que

$$a_n = p_D(0) = \det(-A(D)) = (-1)^n \det(A(D)).$$

Por la regla de Leibniz sabemos que

$$\det(A(D)) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

donde S_n denota el grupo de las permutaciones de n elementos. Luego,

$$a_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^n \text{sg}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{n+e(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

donde $e(\sigma)$ es la cantidad de ciclos pares que componen σ . Sea $p(\sigma)$ la cantidad de ciclos que componen σ , luego $p(\sigma) - e(\sigma)$ es la cantidad de ciclos impares que componen σ .

Por otro lado se tiene que

$$n = \sum_{i=1}^{\epsilon(L)} 2r_i + \sum_{i=1}^{p(L)-\epsilon(L)} 2s_i + 1 = p(L) - e(L) \pmod{2},$$

donde $e(L)$ denota la cantidad de ciclos pares que componen L cuya longitud es $2r_i$ y $p(L) - e(L)$ denota la cantidad de ciclos impares que componen L cuya longitud es $2s_i + 1$. Luego,

$$a_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}.$$

Estudiemos aquellas permutaciones para las cuales $\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \neq 0$,

$$\prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \neq 0 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} = 1 \Leftrightarrow a_{i, \sigma(i)} = 1 \text{ para todo } i.$$

Luego, $(i, \sigma(i)) \in E$ para todo i , por lo que el subdigrafo generado por estos arcos es un digrafo lineal (los ciclos que componen el digrafo lineal son los ciclos de la permutación). Tenemos entonces una biyección entre los conjuntos

$$F = \{\sigma \in S_n : \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = 1\} \text{ y } \mathcal{L}_n$$

y además, $p(\sigma) = p(L)$.

Finalmente obtenemos que

$$a_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{p(\sigma)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in F} (-1)^{p(\sigma)} = \sum_{L \in \mathcal{L}_n} (-1)^{p(L)}.$$

Probemos ahora la igualdad para a_i con $i < n$. Por propiedades de la función \det sabemos que

$$a_i = (-1)^i \sum_{\substack{B < A \\ \text{de orden } i}} \det(B) = \sum_{\substack{B < A \\ \text{de orden } i}} (-1)^i \det(B),$$

donde $B < A$ denota B submatriz principal de A . Dada la correspondencia entre las submatrices principales de una matriz de adyacencia y los subdigrafos generados del digrafo, obtenemos:

$$a_i = \sum_{\substack{\tilde{D} < D \\ \text{de orden } i}} \tilde{a}_i = \sum_{\substack{\tilde{D} < D \\ \text{de orden } i}} \sum_{L \in \tilde{\mathcal{L}}_i} (-1)^{p(L)} = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-1)^{p(L)},$$

donde $\tilde{D} < D$ denota \tilde{D} subgrafo generado de D y \tilde{a}_i el i -ésimo coeficiente de $p_{\tilde{D}}$, lo que finaliza la prueba. □

Definición 2.3.17. La *cintura* de un digrafo D , que denotamos g , es la menor longitud entre las longitudes de los ciclos dirigidos en D , es decir,

$$g = \text{mín}\{k : \text{existe un } k\text{-ciclo en } D\}.$$

Proposición 2.3.18. Sea D un digrafo y a_i con $i = 1, \dots, n$ los coeficientes de su polinomio característico, entonces

$$g = \text{mín}\{i : a_i \neq 0\} \text{ y } a_g = -c_g,$$

donde c_g denota la cantidad de g -ciclos en D .

Demostración. Tenemos que $\mathcal{L}_i = \emptyset$ para todo $i < g$, luego $a_i = 0$ para todo $i < g$. Por otro lado, tenemos que los elementos de \mathcal{L}_g son digrafos de la forma \vec{C}_g , luego,

$$a_g = \sum_{L \in \mathcal{L}_g} (-1)^{p(L)} = \sum_{L \in \mathcal{L}_g} (-1) = -\#\mathcal{L}_g = -c_g \neq 0,$$

lo que termina la prueba. □

Corolario 2.3.19. Sea D un digrafo y P_D su polinomio característico, entonces

$$p_D(x) = x^n \text{ si, y sólo si, } D \text{ es acíclico.}$$

Corolario 2.3.20. Sea D un digrafo y p_D su polinomio característico, entonces

$$p_D(x) = x^n + a_n \text{ con } a_n \neq 0 \text{ si, y sólo si, } D = \vec{C}_n.$$

Demostración. (\Rightarrow) Por la proposición 2.3.18 tenemos que $g = n$ y $a_n = -c_g$, por lo cual en D existe un n -ciclo dirigido y no existen ciclos dirigidos de longitud menor. Consideremos los arcos que componen el ciclo dirigido, si existiera otro arco en D , tendríamos un ciclo de longitud menor a n lo cual es absurdo. Tenemos entonces que $D = \vec{C}_n$.

(\Leftarrow) $p_{\vec{C}_n}(x) = x^n - 1$ lo que termina la prueba. \square

Observación 2.3.21. Sea D un digrafo y p_D su polinomio característico, si $p_D(x) = x^n + a_n$ con $a_n \neq 0$ entonces $p_D(x) = x^n - 1$ y $\rho(D) = 1$.

Proposición 2.3.22. Sea D fuertemente conexo. D es bipartito si, y sólo si, Sp_D es simétrico.

Demostración. Sea $p_D(x) = x^n + \sum_{i=1}^n a_i x^{n-i}$. En primer lugar observemos que Sp_D es simétrico si, y sólo si,

$$p_D(x) = x^\delta q(x^2), \text{ con } \delta = 0, 1 \text{ y } q \text{ polinomio,}$$

esto es, si $a_i = 0$ para todo i impar.

(\Rightarrow) Si D es bipartito tenemos que no posee ciclos impares, por lo cual $\mathcal{L}_i = \emptyset$ y como consecuencia $a_i = 0$ para todo i impar, luego, Sp_D resulta simétrico.

(\Leftarrow) Si Sp_D es simétrico tenemos que $a_i = 0$ para todo i impar.

Afirmación. No existen ciclos impares en D .

Supongamos que existen ciclos impares y sea i_0 la menor longitud entre los ciclos impares, luego, $a_{i_0} = -\#\mathcal{L}_{i_0} \neq 0$ lo cual es absurdo.

Como además D es un digrafo fuertemente conexo tenemos que D resulta bipartito como queríamos probar. \square

Observación 2.3.23. Si D es bipartito entonces Sp_D es simétrico.

Otra matriz que podemos asociarle a un digrafo es la *matriz Laplaciana* cuyo espectro describe de forma más precisa ciertas características del mismo [15] [16].

Definición 2.3.24. Sea $D = (V, E)$ un digrafo y enumeremos los vértices de modo que $V = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Denominamos *matriz Laplaciana* del digrafo D a la matriz $L(D) = L$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i^+ & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denominamos *matriz Laplaciana sin signo* del digrafo D a la matriz $L^+(D) = L^+$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$l_{ij}^+ = \begin{cases} d_i^+ & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 2.3.25. $L = D^+ - A$ y $L^+ = D^+ + A$ donde $D^+ = \text{diag}(d_1^+, \dots, d_n^+)$.

Proposición 2.3.26. *Sea D un digrafo de n vértices, a arcos y c_2 ciclos de largo 2. Sean $L = L(D)$ y $L^+ = L^+(D)$ las matrices Laplaciana y Laplaciana sin signo respectivamente. Se cumple que*

$$\text{tr}(L) = \text{tr}(L^+) = a \quad \text{y} \quad \text{tr}(L^2) = \text{tr}[(L^+)^2] = \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + 2c_2.$$

Demostración. Tenemos que $L = D^+ - A$ y $L^+ = D^+ + A$ por lo cual $\text{tr}(L) = \text{tr}(L^+) = \sum_{i=1}^n d_i^+ = a$. A su vez, $L^2 = D^{+2} - D^+A - AD^+ + A^2$, luego,

$$\text{tr}(L^2) = \text{tr}(D^{+2}) - \text{tr}(D^+A) - \text{tr}(AD^+) + \text{tr}(A^2). \quad (9)$$

Por otro lado, tenemos que

$$(D^+A)_{ii} = (AD^+)_{ii} = d_i^+ a_{ii} = 0,$$

de donde se deduce que $\text{tr}(D^+A) = \text{tr}(AD^+) = 0$ y sustituyendo en (9) obtenemos

$$\text{tr}(L^2) = \text{tr}(D^{+2}) + \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + 2c_2.$$

Utilizando la identidad $L^{+2} = D^{+2} + D^+A + AD^+ + A^2$, de forma análoga obtenemos que

$$\text{tr}(L^{+2}) = \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + 2c_2. \quad \square$$

Proposición 2.3.27. *Sea D un digrafo y L su matriz Laplaciana, entonces 0 es valor propio de L . Además, si D es fuertemente conexo, se tiene que $\text{mg}(0) = 1$.*

Demostración. Es fácil ver que la suma por fila de la matriz L es constante 0, por lo cual

$$L\mathbf{1} = \mathbf{0},$$

y en consecuencia 0 es valor propio.

Veamos ahora que si D es fuertemente conexo entonces todo vector propio asociado al valor propio 0 es de la forma $\alpha\mathbf{1}$. Sea $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ vector propio de L

asociado al valor propio 0, esto es, en el núcleo de L , por lo que podemos suponer v con coordenadas en \mathbb{R} . Tenemos que

$$0 = (Lv)_i = (-Av + Dv)_i = - \sum_{\substack{j/ \\ (x_i, x_j) \in E}} v_j + d_i^+ \cdot v_i,$$

luego,

$$\sum_{\substack{j/ \\ (x_i, x_j) \in E}} v_j = d_i^+ \cdot v_i. \quad (10)$$

Consideremos i_0 tal que $|v_{i_0}| \geq |v_i|$ para todo i , luego,

$$d_{i_0}^+ \cdot |v_{i_0}| \leq \sum_{\substack{j/ \\ (x_{i_0}, x_j) \in E}} |v_j| \leq d_{i_0}^+ \cdot |v_{i_0}|,$$

de donde se deduce que $|v_i| = |v_j|$ para todo j tal que $(i_0, j) \in E$. Dado que el digrafo es fuertemente conexo, repitiendo el razonamiento se obtiene que $|v_i| = |v_j|$ para todo i, j . Podemos suponer que $|v_i| = 1$ para todo i , esto es, $v_i = \pm 1$ para todo i . Luego, por la igualdad (10) obtenemos que v_i posee signo constante, y en consecuencia $v = \pm \mathbf{1}$ lo que termina la prueba. \square

En general no se cumple que la multiplicidad geométrica del valor propio 0 sea igual a la cantidad de componentes fuertemente conexas del digrafo como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.28. Sea $D = (V, E)$ donde $V = \{1, 2, 3\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$. D posee tres componentes fuertemente conexas. Sin embargo

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo espectro es $[0, 1, 2]$ de donde se deduce que $mg(0) = 1$.

La *matriz de Skew* es una matriz asociada a un grafo orientado, pero que también puede asociarse a un grafo, una vez establecida una orientación en él, que satisface interesantes propiedades espectrales [13] [14]. A su vez, la relación existente entre la matriz Laplaciana y la matriz de adyacencia

$$L = D - A,$$

sugiere dos definiciones posibles de *matrices de Skew Laplacianas* de un grafo orientado como veremos a continuación.

Definición 2.3.29. Sea $H = (V, E)$ un grafo orientado y enumeremos los vértices de modo que $V = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Denominamos *matriz de Skew* de un grafo orientado H a la matriz $S(H) = S$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ -1 & \text{si } (x_j, x_i) \in E, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denominamos *matriz de Skew Laplaciana* de un grafo orientado H a la matriz $SL(H) = SL$ de tamaño $n \times n$ y entradas

$$sl_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 1 & \text{si } (x_j, x_i) \in E, \\ d_i^+ + d_i^- & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Existe otro tipo de *matriz de Skew Laplaciana* de un grafo orientado H , que denotaremos $\widetilde{SL}(H) = \widetilde{SL}$ la cual posee tamaño $n \times n$ y entradas

$$\widetilde{sl}_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } (x_i, x_j) \in E, \\ 1 & \text{si } (x_j, x_i) \in E, \\ d_i^+ - d_i^- & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observación 2.3.30. Sea H un grafo orientado. Sean $A = A(H)$ y $S = S(H)$ las matrices de adyacencia y de Skew respectivamente. Se cumple que

$$S = A - A^t.$$

Sean $SL = SL(H)$ y $\widetilde{SL} = \widetilde{SL}(H)$ las matrices de Skew Laplaciana y de Skew Laplaciana alternativa de H respectivamente. Si $D^+ = \text{diag}(d_1^+, \dots, d_n^+)$, $D^- = \text{diag}(d_1^-, \dots, d_n^-)$ tenemos que

$$SL = D^+ + D^- - S \quad \text{y} \quad \widetilde{SL} = D^+ - D^- - S.$$

Proposición 2.3.31. Sea H un grafo orientado con a arcos, sean $S = S(H)$ la matriz de Skew, $SL = SL(H)$ la matriz de Skew Laplaciana y $\widetilde{SL} = \widetilde{SL}(H)$ la matriz de Skew Laplaciana alternativa. Se cumple que

1. $\text{tr}(S) = 0$ y $\text{tr}(S^2) = -2a$.
2. $\text{tr}(SL) = 2a$ y $\text{tr}[(SL)^2] = -2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2$.
3. $\text{tr}(\widetilde{SL}) = 0$ y $\text{tr}[(\widetilde{SL})^2] = -2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2$.

Demostración.

1. Es claro que $tr(S) = 0$. Por otro lado, tenemos que

$$S^2 = (A - A^t)^2 = A^2 - AA^t - A^tA + (A^t)^2,$$

luego,

$$tr(S^2) = tr(A^2) - tr(AA^t) - tr(A^tA) + tr[(A^t)^2] = 2tr(A^2) - 2\|A\|_2^2 = 4c_2 - 2a,$$

donde c_2 es la cantidad de ciclos de largo 2 en H , que por ser grafo orientado es igual a 0. Luego, $tr(S^2) = -2a$ como queríamos probar.

2. Denotando $D = D^+ + D^-$ obtenemos

$$tr(SL) = tr(D - S) = tr(D) - tr(S) = \sum_{i=1}^n d_i^+ + d_i^- = 2a.$$

Por otro lado, $(SL)^2 = (D - S)^2 = D^2 - SD - DS + S^2$. Utilizando la parte 1 y la identidad $tr(DS) = tr(SD) = 0$ obtenemos

$$tr[(SL)^2] = tr(D^2) - tr(DS) - tr(SD) + tr(S^2) = \sum_{i=1}^n (d_i^+ + d_i^-)^2 - 2a.$$

3. Denotando $\tilde{D} = D^+ - D^-$ obtenemos

$$tr(\tilde{S}L) = tr(\tilde{D} - S) = tr(\tilde{D}) - tr(S) = \sum_{i=1}^n d_i^+ - d_i^- = 0.$$

Por otro lado, $(\tilde{S}L)^2 = (\tilde{D} - S)^2 = \tilde{D}^2 - S\tilde{D} - \tilde{D}S + S^2$. Utilizando la parte 1 y la identidad $tr(\tilde{D}S) = tr(S\tilde{D}) = 0$ obtenemos

$$tr[(\tilde{S}L)^2] = tr(\tilde{D}^2) - tr(S\tilde{D}) - tr(\tilde{D}S) + tr(S^2) = \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2 - 2a.$$

□

3. Energía

El concepto de energía de un grafo, que tiene su origen en la química, fue introducido por I. Gutman en el año 1978 [1] y desde entonces ha sido ampliamente estudiado [17] [18] [19]. Existen distintos tipos de energía de un grafo, definidas a partir de una matriz asociada al mismo [2] [3] [4] [5]. Intentando unificar y generalizar a digrafos estos conceptos, introduciremos la definición de energía de una matriz cuadrada, que tiene como antecedentes [20] y [21]. El estudio de la energía de una matriz nos permitirá obtener resultados sobre energía de grafos y digrafos, algunos de ellos ya conocidos.

3.1. Energía de grafos y digrafos

Definición 3.1.1. Sea G un grafo con n vértices. Llamamos *energía del grafo* G y escribimos $\mathcal{E}(G)$ al valor

$$\mathcal{E}(G) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de G .

Observación 3.1.2. $\mathcal{E}(G) \geq 0$ y $\mathcal{E}(G) = 0$ si, y sólo si, G es el grafo vacío.

Entre otros resultados que establecen cotas para la energía de un grafo destacamos a continuación la desigualdad de McClelland [22] y la de Koolen y Moulton [23]. En particular, la desigualdad de McClelland es un resultado obtenido en el contexto químico de la definición de energía que pudo generalizarse al contexto matemático.

Teorema 3.1.3. (McClelland) [22] [18] Sea G un grafo con n vértices y m aristas. Entonces

$$\mathcal{E}(G) \leq \sqrt{2mn}.$$

Además la igualdad se alcanza si y sólo si G es el grafo vacío ó $G = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n}{2}} K_2$.

Teorema 3.1.4. (Koolen y Moulton) Sea G un grafo con n vértices. Entonces

$$\mathcal{E}(G) \leq \frac{n}{2}(1 + \sqrt{n}).$$

La igualdad se da si, y sólo si, G es un grafo fuertemente regular con parámetros $\left(n, \frac{n+\sqrt{n}}{2}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}, \frac{n+2\sqrt{n}}{4}\right)$.

Recordemos que la matriz de adyacencia de un grafo G resulta simétrica y como consecuencia sus valores propios reales. Para generalizar esta definición a digrafos, debemos tener en cuenta que los valores propios se encuentran en el cuerpo de los números complejos.

Existen distintas generalizaciones posibles, algunas de ellas son las introducidas por V. Nikiforov en [20] y por I. Peña y J. Rada en [24],

$$\mathcal{E}_R(D) = \sum_{i=1}^n |Re(\lambda_i)|, \quad \mathcal{E}(D) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_N(D) = \sum_{i=1}^n \sigma_i,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de D y $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ el multiconjunto de los valores singulares de la matriz de adyacencia del digrafo.

Teorema 3.1.5. *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ el espectro de A y $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ el multiconjunto de los valores singulares de A , entonces se cumple que*

$$\sum_{i=1}^n |Re(\lambda_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Además,

1. $\sum_{i=1}^n |Re(\lambda_i)| = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ si y sólo si λ_i es un número real para todo i ,
2. $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \sigma_i$ si y sólo si la matriz A es normal.

Demostración. 1. Tenemos que $|Re(\lambda_i)| \leq |\lambda_i|$ para todo i , además, la igualdad se da si y sólo si λ_i es un número real, luego $\sum_{i=1}^n |Re(\lambda_i)| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ y la igualdad se alcanza si y sólo si $|Re(\lambda_i)| = |\lambda_i|$ para todo i .

2. Por el Teorema 2.2.42 tenemos que existen matrices U unitaria y T triangular superior tales que $A = UTU^*$, sea D una matriz diagonal de entradas

$$d_{ii} = \begin{cases} \frac{|\lambda_i|}{\lambda_i} & \text{si } \lambda_i \neq 0, \\ 1 & \text{si } \lambda_i = 0, \end{cases}$$

que resulta unitaria. La matriz DT resulta triangular superior de diagonal $(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$. Por otro lado, los valores singulares de DT son iguales a los de A , puesto que tanto $DT(DT)^*$ como AA^* son semejantes a TT^* .

Por el Teorema 2.2.34 tenemos que $DT = V\Sigma W^*$ donde V y W^* son matrices unitarias y $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\lambda_i| &= \text{tr}(DT) = \text{tr}(V\Sigma W^*) = \sum_{i=1}^n (V\Sigma W^*)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_j v_{ij} \overline{w_{ij}} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_j \sum_{i=1}^n v_{ij} \overline{w_{ij}} = \sum_{j=1}^n \sigma_j (W^*V)_{jj} = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^n \sigma_j (W^*V)_{jj} \right] = \\ &= \sum_{j=1}^n \sigma_j \text{Re}[(W^*V)_{jj}] \leq \sum_{j=1}^n \sigma_j |(W^*V)_{jj}| \leq \sum_{j=1}^n \sigma_j, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se desprende del hecho de que las matrices W^* y V son unitarias por lo que sus columnas conforman una base ortonormal de \mathbb{C}^n y en consecuencia $|(W^*V)_{jj}| = |\langle C_j(W), C_j(V) \rangle| \leq \|C_j(W)\| \cdot \|C_j(V)\| = 1$. Además, la igualdad se da si y sólo si $C_j(W) = \alpha C_j(V)$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ de módulo 1.

La igualdad se da si y sólo si $Re[(W^*V)_{jj}] = |(W^*V)_{jj}| = 1$ para todo j , esto es, $(W^*V)_{jj} = 1$ para todo j . Como además la matriz W^*V es unitaria, podemos deducir que $W^*V = I_n$, luego, $V^* = V^{-1} = W^*$ por lo cual $T = D^*V\Sigma V^*$ y $A = UD^*V\Sigma V^*U^*$.

Veamos que A resulta normal:

$$AA^* = UD^*V\Sigma^2V^*DU^*,$$

$$A^*A = UV\Sigma^2V^*U^*,$$

como además se cumple que D conmuta con la matriz $V\Sigma^2V^*$ se deduce que la matriz A es normal. Recíprocamente, si A es normal por la proposición 2.2.39 se cumple que $|\lambda_i| = \sigma_i$ por lo cual $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = \sum_{i=1}^n \sigma_i$. □

Corolario 3.1.6. *Sea D un digrafo, entonces se cumple la siguiente desigualdad*

$$\mathcal{E}_R(D) \leq \mathcal{E}(D) \leq \mathcal{E}_N(D).$$

Además,

1. $\mathcal{E}_R(D) = \mathcal{E}(D)$ si y sólo si el espectro de $A(D)$ es real,
2. $\mathcal{E}(D) = \mathcal{E}_N(D)$ si y sólo si la matriz $A(D)$ es normal.

Proposición 3.1.7. *Sea D un digrafo.*

1. $\mathcal{E}_R(D) \geq 0$ y $\mathcal{E}_R(D) = 0$ si y sólo si D es acíclico.
2. $\mathcal{E}(D) \geq 0$ y $\mathcal{E}(D) = 0$ si y sólo si D es acíclico.
3. $\mathcal{E}_N(D) \geq 0$ y $\mathcal{E}_N(D) = 0$ si y sólo si D es el digrafo vacío.

Demostración. En cualquier caso es fácil ver que la energía es no negativa, caractericemos los digrafos con energía nula según las distintas definiciones.

1. $\mathcal{E}_R(D) = 0$ si y sólo si

$$Re(\lambda_1) = \dots = Re(\lambda_n) = 0. \tag{11}$$

Por el Teorema 2.2.74 y la proposición 2.3.12 tenemos que $\rho(A)$ es un número real, por lo cual la condición (11) equivale a $\rho(A) = 0$. A su vez, la anterior condición equivale a $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$, es decir, $P_D(x) = x^n$, lo que equivale por el corolario 2.3.19 a que D no posea ciclos.

2. $\mathcal{E}(D) = 0$ si y sólo si $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ lo que en el ítem anterior probamos que equivale a que D no posea ciclos.

3. $\mathcal{E}_N(D) = 0$ si y sólo si $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0$ si y sólo si $A(D)$ es la matriz nula por el corolario 2.2.37, que es equivalente a que el digrafo D sea vacío.

□

Dado que la definición de energía de un digrafo refiere en última instancia a la matriz de adyacencia, resulta natural definir energía de una matriz. En este sentido consideraremos definiciones alternativas de energía [2] [3] [4] [5] no sólo para grafos sino también para digrafos, que motiven la nueva definición.

Definición 3.1.8. Llamamos *energía Laplaciana* de un grafo G y escribimos $LE(G)$ al valor

$$LE(G) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{2e}{n} \right|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de $L(G) = L$ y e la cantidad de aristas del grafo G .

Llamamos *energía de Skew* de un grafo orientado H y escribimos $SE(D)$ al valor

$$SE(D) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de $S(H) = S$.

Llamamos *energía Laplaciana de Skew* de un grafo orientado H y escribimos $SLE(H)$ al valor

$$SLE(H) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{a}{n} \right|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de $SL(H) = SL$ y a la cantidad de arcos del grafo orientado H .

Llamamos *energía Laplaciana de Skew alternativa* de un grafo orientado D y escribimos $\widetilde{SLE}(H)$ al valor

$$\widetilde{SLE}(H) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de $\widetilde{SL}(H) = \widetilde{SL}$.

Observación 3.1.9. A su vez, por la observación 2.3.6 y las proposiciones 2.3.26 y 2.3.31, tenemos que,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(D) &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(A) - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right|, \\
LE(G) &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(L) - \frac{\text{tr}(L)}{n} \right|, \\
SE(D) &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(S) - \frac{\text{tr}(S)}{n} \right|, \\
SLE(D) &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(SL) - \frac{\text{tr}(SL)}{n} \right|, \\
\widetilde{SLE}(D) &= \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i(\widetilde{SL}) - \frac{\text{tr}(\widetilde{SL})}{n} \right|.
\end{aligned}$$

La anterior observación sugiere la definición que introduciremos en la siguiente sección.

3.2. Energía de matrices

La siguiente definición tiene como antecedentes la definición de energía de matrices cualesquiera propuesta por V. Nikiforov en 2006 [20],

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{i=1}^n \sigma_i,$$

donde $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ denota el multiconjunto de los valores singulares de A , así como la propuesta por J. Liu y B. Liu en 2009 [21] para matrices hermíticas

$$HE(A) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ denota el espectro de A .

Definición 3.2.1. Llamamos *energía de una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y escribimos $E(A)$ al valor

$$E(A) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de A .

Si llamamos γ_i a $\lambda_i - \frac{\text{tr}(A)}{n}$, podemos reescribir la definición de energía de una matriz como

$$E(A) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|,$$

además, podemos suponer que

$$|\gamma_1| \geq \dots \geq |\gamma_n|. \quad (12)$$

Observación 3.2.2. La anterior definición de energía generaliza a matrices cuadradas cualesquiera la introducida por J. Liu y B. Liu en 2009 [21].

Observación 3.2.3. Si D es un digrafo, G un grafo y H un grafo orientado, se cumple que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(D) &= E(A(D)), & LE(G) &= E(L(G)), \\ SE(H) &= E(S(H)), & SLE(H) &= E(SL(H)) \quad \text{y} \quad \widetilde{SLE}(H) = E(\widetilde{SL}(H)). \end{aligned}$$

Esta definición permite generalizar a digrafos distintas energías.

Definición 3.2.4. Llamamos *energía Laplaciana* de un digrafo D y escribimos $LE(D)$ al valor

$$LE(D) = E(L(D)) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{a}{n} \right|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de $L(D) = L$ y a la cantidad de arcos del digrafo D .

Llamamos *energía Laplaciana sin signo* de un digrafo D y escribimos $LE^+(D)$ al valor

$$LE^+(D) = E(L^+(D)) = \sum_{i=1}^n \left| \lambda_i - \frac{a}{n} \right|,$$

donde $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ es el espectro de $L^+(D) = L^+$ y a la cantidad de arcos del digrafo D .

3.3. Cotas para la Energía de matrices

En esta sección estableceremos cotas superiores e inferiores de la energía de matrices anteriormente definida, además de caracterizar las matrices que alcanzan dichas cotas.

Comencemos por probar un lema que nos será de gran utilidad.

Lema 3.3.1. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $[\lambda_1, \dots, \lambda_n]$ su espectro y $\gamma_i = \lambda_i - \frac{1}{n}tr(A)$ con $i = 1, \dots, n$. Entonces se cumplen las siguientes igualdades.*

1. $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$,
2. $\sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 = tr(A^2) - \frac{1}{n}[tr(A)]^2$,
3. $\sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \frac{1}{n}|tr(A)|^2$.

Demostración. 1. $\sum_{i=1}^n \gamma_i = tr\left(A - \frac{tr(A)}{n}I_n\right) = 0$,

2. Tenemos que $tr(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ y $tr(A^2) = \sum_{i=1}^n (\lambda_i)^2$, luego,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{1}{n}tr(A)\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left((\lambda_i)^2 - \frac{2}{n}tr(A)\lambda_i + \frac{1}{n^2}[tr(A)]^2\right) \\ &= tr(A^2) - \frac{2}{n}[tr(A)]^2 + \frac{1}{n}[tr(A)]^2 = tr(A^2) - \frac{1}{n}[tr(A)]^2, \end{aligned}$$

3. Tenemos que

$$\gamma_i = \lambda_i - \frac{tr(A)}{n} = \left(Re(\lambda_i) - \frac{1}{n}Re[tr(A)]\right) + i \left(Im(\lambda_i) - \frac{1}{n}Im[tr(A)]\right),$$

luego,

$$\begin{aligned} |\gamma_i|^2 &= \left(Re(\lambda_i) - \frac{1}{n}Re[tr(A)]\right)^2 + \left(Im(\lambda_i) - \frac{1}{n}Im[tr(A)]\right)^2 \\ &= [Re(\lambda_i)]^2 - \frac{2}{n}Re(\lambda_i)Re[tr(A)] + \frac{1}{n^2}(Re[tr(A)])^2 \\ &\quad + [Im(\lambda_i)]^2 - \frac{2}{n}Im(\lambda_i)Im[tr(A)] + \frac{1}{n^2}(Im[tr(A)])^2 \\ &= |\lambda_i|^2 - \frac{2}{n}Re(\lambda_i)Re[tr(A)] - \frac{2}{n}Im(\lambda_i)Im[tr(A)] + \frac{1}{n^2}|tr(A)|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 &= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \frac{2}{n} \operatorname{Re} [\operatorname{tr}(A)] \sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\lambda_i) - \frac{2}{n} \operatorname{Im} [\operatorname{tr}(A)] \sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(\lambda_i) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} |\operatorname{tr}(A)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \frac{2}{n} (\operatorname{Re} [\operatorname{tr}(A)])^2 - \frac{2}{n} (\operatorname{Im} [\operatorname{tr}(A)])^2 + \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \\
&= \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \frac{2}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 + \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.2. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se cumple que*

$$E(A) \leq \sqrt{n \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \right)}.$$

La igualdad se alcanza si y sólo si las filas de la matriz $A - \frac{\operatorname{tr}(A)}{n} I_n$ conforman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a $\sqrt{\alpha}$ donde $\alpha = \frac{1}{n} (\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2)$.

Demostración. Por el Teorema 2.2.42 de factorización de Schur tenemos que $A = UTU^*$, con U en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ unitaria y T triangular superior de entradas t_{ij} . Por la observación 2.2.43 sabemos que su diagonal está compuesta por los valores propios de A . Luego,

$$\|A\|_2^2 = \|T\|_2^2 = \sum_{i,j} |t_{ij}|^2 \geq \sum_{i=1}^n |t_{ii}|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2. \quad (13)$$

Sea $\gamma = (|\gamma_1|, \dots, |\gamma_n|)^t$, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$E(A) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i| = \langle \gamma, \mathbf{1} \rangle \leq \|\gamma\| \|\mathbf{1}\| = \sqrt{n \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2}.$$

A su vez, por la parte 3 del lema 3.3.1 y (13) obtenemos que

$$\sqrt{n \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2} = \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \right)} \leq \sqrt{n \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \right)},$$

de donde se deduce que

$$E(A) \leq \sqrt{n \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |\operatorname{tr}(A)|^2 \right)}.$$

Estudiemos condiciones necesarias y suficientes para que se alcance la igualdad. Tenemos que

$$E(A) = \sqrt{n \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)}$$

si y sólo si

$$\sum_{i,j} |t_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^n |t_{ii}|^2 \Leftrightarrow T \text{ diagonal,}$$

y

$$\langle \gamma, \mathbf{1} \rangle = \|\gamma\| \|\mathbf{1}\| \Leftrightarrow \gamma = c\mathbf{1}.$$

Por ser T diagonal tenemos que A es normal y en consecuencia que $A - \frac{tr(A)}{n}I_n$ lo es. A su vez, por ser $\gamma = c\mathbf{1}$ tenemos que $|\gamma_i| = c$ para todo $i = 1, \dots, n$, por lo cual $|\gamma_i| = \frac{E(A)}{n} = \sqrt{\frac{1}{n} \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)}$, por la observación 2.2.41 tenemos que las filas de la matriz $A - \frac{tr(A)}{n}I_n$ forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante $\sqrt{\frac{1}{n} \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)}$.

Recíprocamente, si las filas de la matriz $A - \frac{tr(A)}{n}I_n$ forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante $\sqrt{\alpha}$, entonces por la observación 2.2.41 se cumple que $A - \frac{tr(A)}{n}I_n$ es normal y $|\gamma_i| = \sqrt{\alpha}$, luego

$$E(A) = \sum_{i=1}^n |\gamma_i| = n\sqrt{\alpha} = \sqrt{n \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)}$$

lo que termina la prueba. □

Observación 3.3.3. La condición necesaria y suficiente para que la cota del Teorema anterior sea alcanzada podría reformularse del siguiente modo:

$$\left(A - \frac{tr(A)}{n}I_n \right) \left(A - \frac{tr(A)}{n}I_n \right)^* = \alpha I_n$$

donde $\alpha = \frac{1}{n} \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)$.

Ejemplo 3.3.4.

Sea A la siguiente matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $tr(A) = 0$, por lo cual $A = A - \frac{tr(A)}{n}I_n$, cuyas filas conforman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a $1 = \frac{1}{n} \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)$

luego, la energía de esta matriz alcanza la igualdad del Teorema 3.3.2, en particular $E(A) = n$.

Establezcamos ahora una cota inferior para la energía de una matriz cualquiera A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Teorema 3.3.5. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se cumple que*

$$E(A) \geq \sqrt{2 \left| \text{tr}(A^2) - \frac{1}{n} [\text{tr}(A)]^2 \right|}$$

La igualdad se alcanza si y sólo si la matriz $A - \frac{\text{tr}(A)}{n} I_n$ es nilpotente o posee dos valores propios (contados con su multiplicidad) no nulos y opuestos, de módulo $\sqrt{\frac{1}{2} \left| \text{tr}(A^2) - \frac{1}{n} [\text{tr}(A)]^2 \right|}$.

Demostración. Tenemos que $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 0$ por la parte 1. del lema 3.3.1, luego,

$$0 = \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 + 2 \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j,$$

por lo cual

$$\sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 = -2 \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j. \quad (14)$$

Utilizando la desigualdad triangular, (14) y la parte 3. del lema 3.3.1 obtenemos que

$$\begin{aligned} [E(A)]^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |\gamma_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 + 2 \sum_{i < j} |\gamma_i| |\gamma_j| \\ &\geq \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 + 2 \left| \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j \right| = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^2 + \left| \sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 \right| \\ &\geq 2 \left| \sum_{i=1}^n (\gamma_i)^2 \right| = 2 \left| \text{tr}(A^2) - \frac{1}{n} [\text{tr}(A)]^2 \right| \end{aligned} \quad (15)$$

lo que prueba la cota inferior.

La igualdad se da si y sólo si

$$\left| \sum_{j < l} \gamma_j \gamma_l \right| = \sum_{j < l} |\gamma_j| |\gamma_l| \quad \text{y} \quad \left| \sum_{k=1}^n \gamma_k^2 \right| = \sum_{k=1}^n |\gamma_k|^2,$$

de donde se obtiene que para todo $j < l$ y para todo k

$$\gamma_j \gamma_l = \alpha_{jl} z \quad \text{y} \quad \gamma_k^2 = \alpha_k w$$

con z, w en \mathbb{C} y $\alpha_{jl}, \alpha_k \geq 0$.

Considerando $w = \rho e^{\theta i}$ y $\gamma_k = \rho_k e^{\theta_k i}$ obtenemos que $2\theta_k$ es congruente con θ módulo 2π , es decir, $\theta_k = \frac{\theta}{2}$ ó $\theta_k = \frac{\theta}{2} + \pi$ para todo k . Además tenemos que $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0$, lo cual implica que el multiconjunto $[\gamma_1, \dots, \gamma_n]$ se compone por pares de elementos opuestos y los restantes elementos nulos. Recordemos que $|\gamma_1| \geq \dots \geq |\gamma_n|$ y veamos que $|\gamma_3| = 0$ lo que muestra que $\gamma_3 = \dots = \gamma_n = 0$. Podemos suponer $|\gamma_1| > 0$ pues de lo contrario obtenemos que $|\gamma_3| = 0$. La condición $\gamma_j \gamma_l = \alpha_{jl} z$ con α en \mathbb{C} y $\alpha_{jl} \geq 0$ implica que para $\gamma_j, \gamma_l \neq 0$ se cumple que $\theta_j + \theta_l$ es constante módulo 2π . Sin embargo tenemos que $\theta_1 + \theta_2 = \theta + \pi$ y $\theta_1 + \theta_3 = \theta$, lo cual es absurdo. \square

Corolario 3.3.6. *Sea A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La igualdad del Teorema 3.3.5 se alcanza si y sólo si*

$$Sp_B = [0^{(n)}] \quad \text{o} \quad Sp_B = [-\beta, 0^{(n-2)}, \beta]$$

donde $B = A - \frac{\text{tr}(A)}{n} I_n$ y $\beta = \sqrt{\frac{1}{2} |\text{tr}(A^2) - \frac{1}{n} [\text{tr}(A)]^2|}$.

Demostración. Sabemos que la igualdad se alcanza si y sólo si la matriz B es nilpotente o posee dos valores propios (contados con su multiplicidad) no nulos y opuestos, de módulo $\sqrt{\frac{1}{2} |\text{tr}(A^2) - \frac{1}{n} [\text{tr}(A)]^2|}$. Dado que B posee entradas en \mathbb{R} , tenemos que $p_B \in \mathbb{R}[x]$, por lo cual, las raíces $\lambda \notin \mathbb{R}$ se presentan de a pares $(\lambda, \bar{\lambda})$. Como a su vez sabemos que $\lambda = -\bar{\lambda}$ tenemos que $\lambda = 0$ lo cual es absurdo y prueba que $Sp_B = [-\beta, 0^{(n-2)}, \beta]$. \square

Ejemplo 3.3.7.

Sea $p(z) = z^n - \gamma^2 z^{n-2}$ un polinomio que depende de γ en \mathbb{C} . Sea $A(p)$ en $M_n(\mathbb{C})$ la *matriz compañera* de p es decir,

$$A(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el polinomio característico de $A(p)$ resulta ser $p(z)$, tenemos que sus valores propios no nulos son γ y $-\gamma$ por lo cual, $A(p)$ alcanza la cota inferior del Teorema 3.3.5 que vale $2|\gamma|$.

3.4. Aplicación a Energía de grafos y digrafos

En esta sección, utilizando los Teoremas 3.3.2 y 3.3.5 obtendremos cotas para los distintos tipos de Energía definidos en la sección 3.1. algunas de las cuales son ya conocidas.

Comenzaremos por observar que la energía de un digrafo queda dada por las energías de las componentes fuertemente conexas.

Proposición 3.4.1. *Sea D un digrafo y D_1, \dots, D_l los subdigrafos generados por los vértices de cada componente fuertemente conexa, entonces se cumple que*

$$\mathcal{E}(D) = \sum_{i=1}^l \mathcal{E}(D_i).$$

Demostración. Por la proposición 2.3.12 tenemos que $Sp_D = \sqcup_{i=1}^l Sp_{D_i}$, luego, se cumple que $\mathcal{E}(D) = \sum_{\lambda \in Sp_D} |\lambda| = \sum_{i=1}^l \sum_{\lambda \in Sp_{D_i}} |\lambda| = \sum_{i=1}^l \mathcal{E}(D_i)$. \square

El siguiente Teorema es un resultado original:

Teorema 3.4.2. *Sea D un digrafo con n vertices y a arcos, entonces*

$$\mathcal{E}(D) \leq \sqrt{na},$$

y la igualdad se alcanza si y sólo si D es lineal o es el grafo vacío.

Observación 3.4.3. Esta cota generaliza la de McClelland 3.1.3.

Demostración. Sea $A = A(D)$, tenemos que $\|A\|_2^2 = a$ y $tr(A) = 0$, luego, por el Teorema 3.3.2 se cumple que

$$\mathcal{E}(D) = E(A) \leq \sqrt{n \left(\|A\|_2^2 - \frac{1}{n} |tr(A)|^2 \right)} = \sqrt{na}.$$

Veamos que los digrafos no vacíos que alcanzan la cota son de la forma $D = \bigoplus_{i=1}^l \overrightarrow{C}_{n_i}$.

Por la observación 3.3.3 sabemos que la cota se alcanza si y sólo si $AA^* = A^*A = \frac{a}{n}I_n$, luego, el multiconjunto de valores singulares es $\left[\sqrt{\frac{a}{n}}^{(n)} \right]$ y por la proposición 2.2.39 tenemos que $|\lambda_k| = \sqrt{\frac{a}{n}} > 0$ para todo $k = 1, \dots, n$, es decir, $|\lambda_k| = \rho$ para todo $k = 1, \dots, n$ y $\rho = \sqrt{\frac{a}{n}} > 0$.

Consideremos en primer lugar el caso en el que D es fuertemente conexo. Tenemos que todos los valores propios se encuentran en el círculo espectral, por el Teorema 2.2.74 de Perron-Frobenius se cumple que $R_{0, \frac{2\pi}{n}}(Sp_D) = Sp_D$ por lo cual el espectro es (visto en el plano complejo) el conjunto de vértices de un polígono regular con uno de sus vértices en el eje \overrightarrow{Ox} , esto es, el conjunto de raíces enésimas de ρ^n , lo que equivale a la siguiente igualdad

$$p_D(x) = x^n - \rho^n,$$

que por el corolario 2.3.20 implica que $D = \overrightarrow{C}_n$.

Consideremos ahora el caso general. Sean D_1, \dots, D_l los digrafos generados por los n_i vértices de cada componente fuertemente conexa, por la proposición 2.3.12 se tiene que $Sp_D = \sqcup_{i=1}^l Sp_{D_i}$. Denotando $\rho_i = \rho(D_i)$ se tiene que $\rho_i = \rho$ y todos los valores propios de D_i se encuentran en el círculo espectral, por el caso anterior se tiene que $D_i = \overrightarrow{C}_{n_i}$. Además, la observación 2.3.21 prueba que $\rho_i = \sqrt{\frac{a}{n}} = 1$ por lo cual $a = n$ y no existen arcos en D además de los que componen los l ciclos dirigidos, por lo cual D es suma directa de ciclos dirigidos.

Recíprocamente, si $D = \oplus_{i=1}^l \overrightarrow{C}_{n_i}$ se tiene que

$$\mathcal{E}(D) = \sum_{i=1}^l \mathcal{E}(\overrightarrow{C}_{n_i}) = \sum_{i=1}^l E(A(\overrightarrow{C}_{n_i})).$$

Por el ejemplo 3.3.4 sabemos que $E(A(\overrightarrow{C}_{n_i})) = n_i$, luego

$$\mathcal{E}(D) = \sum_{i=1}^l n_i = n = \sqrt{na}.$$

□

Veamos algunas aplicaciones directas del Teorema 3.3.2 a otras definiciones de energía.

Corolario 3.4.4.

1. Sea D un digrafo de n vértices y a arcos, sean $L = L(D)$ y $L^+ = L^+(D)$ las matrices Laplaciana y Laplaciana sin signo asociadas al digrafo.

a) Energía Laplaciana:

$$LE(D) = E(L) \leq \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + a - \frac{1}{n}a^2 \right)},$$

la igualdad se da si y sólo si las filas de la matriz L forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a $\sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + a - \frac{1}{n}a^2 \right)}$.

b) Energía Laplaciana sin signo:

$$L^+E(D) = E(L^+) \leq \sqrt{n \left(\sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + a - \frac{1}{n}a^2 \right)},$$

la igualdad se da si y sólo si las filas de la matriz L^+ forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a $\sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + a - \frac{1}{n}a^2 \right)}$.

2. Sea H un grafo orientado con n vértices y a arcos, sean $S = S(H)$, $SL = SL(H)$ y $\widetilde{SL} = \widetilde{SL}(H)$ la matriz de Skew, la matriz Laplaciana de Skew y la matriz Laplaciana de Skew alternativa respectivamente.

a) Energía de Skew:

$$SE(H) = E(S) \leq \sqrt{2an},$$

la igualdad se da si y sólo si las filas de la matriz S forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a $\sqrt{\frac{2a}{n}}$.

b) Energía Laplaciana de Skew:

$$SLE(H) = E(SL) \leq \sqrt{n \left(2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ + d_i^-)^2 - \frac{1}{n} 4a^2 \right)},$$

la igualdad se da si y sólo si las filas de la matriz $SL - \frac{2a}{n}I_n$ forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a

$$\sqrt{\frac{1}{n} \left(2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ + d_i^-)^2 - \frac{1}{n} 4a^2 \right)}.$$

c) Energía Laplaciana de Skew alternativa:

$$\widetilde{SLE}(H) = E(\widetilde{SL}) \leq \sqrt{n \left(2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2 \right)},$$

la igualdad se da si y sólo si las filas de la matriz \widetilde{SL} forman un conjunto ortogonal y poseen norma constante igual a $\sqrt{\frac{1}{n} \left(2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2 \right)}$.

Demostración. Todos los resultados son consecuencia directa del Teorema 3.3.2 utilizando los siguientes resultados:

1. $\|L\|_2^2 = \|L^+\|_2^2 = a + \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2$ y por la proposición 2.3.26 tenemos que $tr(L) = tr(L^+) = a$.
2. a) $\|S\|_2^2 = 2a$ y por la proposición 2.3.31 tenemos que $tr(S) = 0$.
 b) $\|SL\|_2^2 = 2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ + d_i^-)^2$ y por la proposición 2.3.31 tenemos que $tr(SL) = 2a$.
 c) $\|\widetilde{SL}\|_2^2 = 2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2$ y por la proposición 2.3.31 tenemos que $tr(\widetilde{SL}) = 0$.

□

Veamos ahora algunas aplicaciones de Teorema 3.3.5 a otras definiciones de energía.

Teorema 3.4.5. *Sea D un digrafo con n vértices y c_2 ciclos de largo 2, entonces $\mathcal{E}(D) \geq 2\sqrt{c_2}$ y la igualdad se da si y sólo si D es acíclico o su espectro $[-\sqrt{c_2}, 0^{(n-2)}, \sqrt{c_2}]$.*

Demostración. Sea $A = A(D)$, tenemos que $\text{tr}(A^2) = 2c_2$ y $\text{tr}(A) = 0$, luego, por el Teorema 3.3.5 tenemos que

$$\mathcal{E}(D) = E(A) \geq \sqrt{4c_2} = 2\sqrt{c_2}.$$

Además, por el corolario 3.3.6 sabemos que la igualdad se da si, y sólo si,

$$Sp_D = [0^{(n)}] \quad \text{o} \quad Sp_D = [-\sqrt{c_2}, 0^{(n-2)}, \sqrt{c_2}].$$

Es decir, la igualdad se da si, y sólo si, D es acíclico o $Sp_D = [-\sqrt{c_2}, 0^{(n-2)}, \sqrt{c_2}]$. □

Observación 3.4.6. Si D es fuertemente conexo y alcanza la igualdad del Teorema 3.4.5 entonces es bipartito puesto que su espectro es simétrico.

Si bien los grafos bipartitos con tres o menos valores propios quedan caracterizados [30], este resultado no se cumple para digrafos [31].

Corolario 3.4.7. 1. *Sea D un digrafo de n vértices, a arcos y c_2 ciclos de largo 2, sean $L = L(D)$ y $L^+ = L^+(D)$ las matrices Laplaciana y Laplaciana sin signo asociadas al digrafo.*

a) *Energía Laplaciana:*

$$LE(D) = E(L) \geq \sqrt{2 \left| \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + 2c_2 - \frac{1}{n}a^2 \right|}.$$

b) *Energía Laplaciana sin signo:*

$$L^+E(D) = E(L^+) \geq \sqrt{2 \left| \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + 2c_2 - \frac{1}{n}a^2 \right|}.$$

2. *Sea H un grafo orientado con n vértices y a arcos, sean $\widetilde{S} = \widetilde{S}(H)$ la matriz de Skew, sea $SL = SL(H)$ la matriz laplaciana de Skew y $\widetilde{SL} = \widetilde{SL}(H)$ la matriz laplaciana de Skew alternativa.*

a) *Energía de Skew:*

$$SE(H) = E(S) \geq 2\sqrt{a}.$$

b) *Energía Laplaciana de Skew:*

$$SLE(H) = E(SL) \geq \sqrt{2 \left| -2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 - \frac{1}{n}(2a)^2 \right|}.$$

c) *Energía Laplaciana de Skew alternativa:*

$$\widetilde{SLE}(H) = E(\widetilde{SL}) \geq \sqrt{2 \left| -2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2 \right|}.$$

Demostración. Todos los resultados son consecuencia directa del Teorema 3.3.5 utilizando los siguientes resultados:

1. $tr(L) = tr(L^+) = a$ y $tr(L^2) = tr[(L^+)^2] = \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2 + 2c_2$ por la proposición 2.3.26.
2. a) $tr(S) = 0$ y $tr(S^2) = -2a$ por la proposición 2.3.31.
 b) $tr(SL) = 2a$ y $tr[(SL)^2] = -2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+)^2$ por 2.3.31.
 c) $tr(\widetilde{SL}) = 0$ y $tr[(\widetilde{SL})^2] = -2a + \sum_{i=1}^n (d_i^+ - d_i^-)^2$ por 2.3.31.

□

Referencias

- [1] I. Gutman, The energy of a graph, Ber. Math. Statist. Sect. Forschungsz. Graz 103 (1978) 1-22.
- [2] I. Gutman, B. Zhou, Laplacian energy of a graph, Lin. Algebra Appl. 414 (2006) 29-37.
- [3] C. Adiga, R. Balakrishnan, W. So, The skew energy of a digraph, Lin. Algebra Appl. 432 (2010) 1825-1835.
- [4] C. Adiga, M. Smitha, On the Skew Laplacian Energy of a Digraph, Int. Math. Forum, 4, (2009) no. 39, 1907-1914.
- [5] Q. Cai, X. Li, J. Song, New skew Laplacian energy of a simple digraph. Trans. Comb. 2 (2013) no. 1, 27-37.
- [6] D. Bravo, F. Cubría, J Rada, Energy of matrices, Applied Mathematics and Computation 312 (2017) 149-157.
- [7] C. Godsil, G. Royle, Algebraic Graph Theory, Springer, New York (2001).
- [8] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press (1993).
- [9] D.M. Cvetcović, M. Doob, H.Sachs, Spectra of graphs, Academic Press, New York (1979).
- [10] L. Page, S. Brin, R. Motwani, T. Winograd, The PageRank citation ranking: Bringing order to the web. Stanford InfoLab (1999).
- [11] F.R. Gantmacher, Theory of matrices, Chelsea Publishing Company, New York, 68 (1959).
- [12] H. Sachs, Beziehungen zwischen den in einen Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakterischen Polynom, Publ. Math. Debrecen 11 (1964) 119-134.
- [13] M. Cavers, S.M. Cioaba, S. Fallat, D.A. Gregory, W.H. Haemers, S.J. Kirkland, J.J. McDonald, M. Tsatsomeros, Skew-adjacency matrices of graphs, Lin. Algebra Appl. 436.12 (2012) 4512-4529.
- [14] B. Shader, W. So, Skew spectra of oriented graphs, The electronic journal of combinatorics 16.1 (2009) no. 32.
- [15] B. Mohar, et al., The Laplacian spectrum of graphs, Graph theory, combinatorics, and applications 2 (1991) 871-898.
- [16] R. Merris, Laplacian matrices of graphs: a survey, Lin. Algebra Appl. 197 (1994) 143-176.
- [17] I. Gutman, X. Li, J. Zhang, Graph energy, Analysis of Complex Networks. From Biology to Linguistics. Wiley-VCH, Weinheim (2009) 145-174.
- [18] X. Li, Y. Shi, I. Gutman, Graph energy, Springer-Verlag, New York (2012).

- [19] V. Nikiforov, Beyond graph energy: Norms of graphs and matrices, *Lin. Algebra Appl.* 506 (2016) 82-138.
- [20] V. Nikiforov, The energy of graphs and matrices, *J. Math. Anal. Appl.* 326 (2007) 1472-1475.
- [21] J. Liu, B. Liu, Generalization for Laplacian energy, *Appl. Math. J. Chinese Univ.* 24 (2009) 443-450.
- [22] B.J. McClelland, Properties of the latent roots of a matrix: the estimation of π -electron energies, *J. Chem. Phys.* 54 (1971) 640-643.
- [23] J.H. Koolen and V. Moulton, Maximal Energy Graphs, *Adv. Appl. Math.* 26 (2001) 47.
- [24] I. Peña, J. Rada, Energy of digraphs, *Lin. Multin. Alg.* 56 (2008) 565-579.
- [25] O. Perron, Zur Theorie der Matrices. *Math. Ann.*, 64 (1907) 248-263 .
- [26] G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen. *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1908) 471-476. Reimpreso en *Abhandlungen* 3, 404-409.
- [27] G. Frobenius, Über Matrizen aus positiven Elementen II. *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1909) 514-518. Reimpreso en *Abhandlungen* 3, 410-414.
- [28] G. Frobenius, Über Matrizen aus nicht negativen Elementen. *Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin* (1912) 456-477. Reimpreso en *Abhandlungen* 3, 546-567.
- [29] J. Rada, A. J. Ríos, *Introducción a la Teoría Espectral de Digrafos*. Ediciones IVIC (2011).
- [30] M. Doob, Graphs with a small number of distinct eigenvalues. *Ann. New York Academy Sci.* 175, No. 1 (1970) 104-110.
- [31] A. Olivieri, J. Rada, A. J. Ríos, Digraphs with few eigenvalues *Utilitas Mathematica* 96 (2015) 89-99.